

8. Übungsblatt zur Vorlesung Entwurf und Analyse von Algorithmen, WS 12/13

Abgabe: Bis Donnerstag, 06.12.2012, 12:00 Uhr, Abgabekasten vor 48-694.

Ab sofort gilt: Aufgaben, die kreative Elemente beinhalten, *müssen* mit Ideen *eingeleitet* werden. Wir erwarten also:

- Bei Algorithmenentwurfsaufgaben – also z. B. die mit „Entwerfen Sie...“ oder „Skizzieren Sie...“ eingeleiteten, aber auch jene mit „Implementieren Sie...“, wenn sie Entwurfs-elemente beinhalten – eine *abstrakte, klare* Idee, die aufzeigt, *was* getan werden soll und *warum* das richtig ist.
- Bei Beweisaufgaben je nach Komplexität des Beweises die Kern-idee(n), mindestens aber den Ansatz und bei Bedarf („Zeigen oder widerlegen Sie...“) die Behauptung.

Abgaben zu Aufgaben, die das nicht erfüllen, werden *nicht korrigiert* und entsprechend mit *null Punkten* bewertet. Bitte berücksichtigen Sie dies in Zukunft.

Eine Idee kann man übrigens oft mit einer Skizze oder einem wohlge-wählten Beispiel unterstützen (aber nicht ersetzen).

47. Aufgabe

	a)	b)
Track ε	[1]	2
Track AI	[1]	2

Verwenden Sie Satz 3.3, um folgende homogene lineare Rekursionsgleichungen zu lösen:

a)

$$a_1 = 1,$$

$$a_2 = 4,$$

$$a_i = 2 \cdot a_{i-1} + 3 \cdot a_{i-2}, \quad i \geq 3.$$

b)

$$b_0 = 5,$$

$$b_1 = 7,$$

$$b_2 = 9,$$

$$b_i = 12 \cdot b_{i-2} - 16 \cdot b_{i-3}, \quad i \geq 3.$$

48. Aufgabe

Track ε 2

Track AI [2]

Bestimmen Sie mit Hilfe der Subtraktionsmethode (diese haben wir bei der Analyse der Suchzeiten binärer Suchbäume kennengelernt) eine lineare Rekursionsgleichung, die dieselbe Zahlenfolge erzeugt, wie die nachfolgende Rekursionsgleichung mit *Full History*:

$$X_0 = 1,$$

$$X_n = 3 + \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_k, \quad n \geq 1.$$

49. Aufgabe

Track ε [3]

Track AI [3]

Wir haben gesehen, dass das Einfügen einer sortierten Folge in einen binären Suchbaum diesen zu einer Liste entarten lässt. Wir untersuchen, ob dieser Effekt bereits durch das Vorkommen sortierter Teilfolgen in der Einfügefølge erzwungen wird.

Sei $(x_i)_i = x_1, \dots, x_k$ eine Folge, dann ist x_{i_1}, \dots, x_{i_l} eine Teilfolge von $(x_i)_i$ der Länge $l \leq k$, falls $i_j < i_{j+1}$ für $1 \leq j \leq l-1$ und $1 \leq i_1$ sowie $i_l \leq k$ gilt. Eine Teilfolge ist also die ursprüngliche Folge oder sie entsteht durch Weglassen von Einträgen der ursprünglichen Folge.

Eine Folge y_1, \dots, y_l heißt *monoton*, falls entweder $y_i \leq y_{i+1}$ für alle i mit $1 \leq i \leq l-1$ gilt, oder $y_i \geq y_{i+1}$ für alle i mit $1 \leq i \leq l-1$ gilt.

Die Einfügefølge $(x_i)_i = x_1, \dots, x_k$, die den binären Suchbaum T erzeugt, bestehe aus paarweise verschiedenen natürlichen Zahlen. Es sei H die Höhe von T und es sei l die Länge einer längsten monotonen Teilfolge von $(x_i)_i$.

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

- i) Es gilt stets $H \leq l$.
- ii) Es gilt stets $H \geq l$.
- iii) Es gilt stets $H = l$.

50. Aufgabe

	a)	b)
Track ε	4	[3]
Track AI	4	[3]

Zur Wiederholung: Ein gewichtsbalancierter Baum ist ein binärer Baum, in dem für jeden Knoten $v \in V$ der Quotient $\frac{1+|V_l|}{1+|V|}$ einen Wert aus dem Intervall $[\alpha, 1 - \alpha]$ annimmt, α fest aus $[0, \frac{1}{2}]$. Dabei ist V die Menge der Knoten des Teilbaums mit Wurzel v und V_l die Menge der Knoten im linken Teilbaum des Knotens v .

- a) Zeigen Sie, dass für die Höhe $h(T)$ eines α -balancierten Baums T für $\alpha \neq 0$ gilt

$$h(T) \leq 1 + \frac{\log_2(n+1) - 1}{\log_2\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)}.$$

- b) Zeigen oder widerlegen Sie: Es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$, sodass alle AVL-Bäume mit $n \geq n_0$ Knoten α -balanciert sind.

51. Aufgabe

	a)	b)	c)
Track ε	[1]	[1]	[1]
Track AI	[1]	[1]	[1]

Stellen Sie für die Folge

3, 6, 16, 17, 30, 31, 46, 60, 68, 69, 76, 78, 87, 95, 125

jeweils das Ergebnis dar, wenn die Elemente von links nach rechts in die anfänglich leere Datenstruktur eingefügt werden; und zwar für:

- B-Baum der Ordnung $m = 4$
- Digitaler Suchbaum
- Trie

Hinweis: Für die Aufgabenteile b) und c) wandeln Sie die Elemente zunächst in 7-Bit Binärzahlen um.

52. Aufgabe

	a)	b)
Track ε	[1]	[1]
Track AI	1	1

Implementieren Sie Algorithmen für folgende Operationen im Trie. Elemente werden dabei als binärer String der Länge k (globale Konstante) an die Prozeduren übergeben.

- Einfügen eines Elements
- Löschen eines (gegebenen) Elements

53. Aufgabe

Bereiten Sie sich auf die Zwischenklausur vor!