Ausgabedatum: 25.10.2012
Version: 2012-10-25 09:34

# 3. Übungsblatt zur Vorlesung Entwurf und Analyse von Algorithmen, WS 12/13

***Abgabe:*** *Bis Donnerstag, 01.11.2012, 12:00 Uhr, Abgabenkasten vor 48-694.*

## 11. Aufgabe

| | a) | b) | c) | d) |
|---|---|---|---|---|
| **Track $\varepsilon$** | 2 | [2] | [2] | [3] |
| **Track AI** | 2 | [2] | [2] | [3] |

Wir definieren zwei Alternativen zu $\mathcal{O}$ aus Definition 1.8:

- $\mathcal{O}'(f) = \{g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+ \mid \exists c > 0\, \forall n \geq 0 \,:\, g(n) \leq cf(n)\}$
- $\mathcal{O}''(f) = \{g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+ \mid \exists c, d > 0\, \forall n \geq 0 \,:\, g(n) \leq cf(n) + d\}$

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Für alle $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ gilt $\mathcal{O}(f) = \mathcal{O}'(f)$.

b) Für alle $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ gilt $\mathcal{O}(f) = \mathcal{O}''(f)$.

c) Für alle $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ gilt $\mathcal{O}'(f) = \mathcal{O}''(f)$.

d) Gibt es eine im Kontext der Laufzeitanalyse bedeutsame Menge von Funktionen, für die alle behaupteten Identitäten gelten?

**Hinweis:** Verwenden Sie genau die in Definition 1.8 gegebene Formulierung! Zusätzlich können Sie gerne weitere Definitionen aus anderen Quellen auf Äquivalenz untersuchen.

"$g : A \to B$" ist hierbei eine (auch international) gängige Alternative zu "$g \in \mathrm{Abb}(A, B)$"; beides ist als "$g$ ist Funktion, die Werte aus $A$ auf Werte in $B$ abbildet" zu lesen.

## 12. Aufgabe

| | a) | b) | c) |
|---|---|---|---|
| **Track $\varepsilon$** | [3] | [2] | [3] |
| **Track AI** | 3 | 2 | 3 |

Seien $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Seien ferner $\mathsf{bin}(n) = n_1 \cdots n_k \in \{0,1\}^\star$ die Binärdarstellung von $n$ ohne führende Nullen – also $n_1 = 1$ – und $\varphi : \{0,1\} \to \{\mathsf{Q}, \mathsf{M}\}^\star$ der *Monoidhomomorphismus* mit

$$\varphi(b) = \begin{cases} \mathsf{Q} & , b = 0 \\ \mathsf{QM} & , b = 1 \end{cases} .$$

**Hinweis:** Ein "Monoidhomomorphismus", der wie hier auf dem Alphabet einer formalen Sprache definiert ist, kann auf Wörtern über diesem Alphabet – die ein Monoid bilden – *fortgesetzt*, das heißt zeichenweise angewendet werden. Es gilt also zum Beispiel $\varphi(0010) = \mathsf{QQQMQ}$, $\varphi(11) = \mathsf{QMQM}$ und $\varphi(\varepsilon) = \varepsilon$. Hierbei bezeichnet $\varepsilon$ das leere Wort (mit Länge 0).

a) Zeigen Sie: Interpretiert man Q als “Quadriere den aktuellen Wert” und M als “Multipliziere den aktuellen Wert mit $x$”, dann beschreibt das Wort $\varphi(n_2 \cdots n_k)$ – das erste Bit von $n$ wird also ignoriert – buchstabenweise von links nach rechts gelesen eine Vorschrift zur Berechnung von $x^n$ aus dem Startwert $x$. Dieses Vorgehen nennt man auch *binäre Methode*.

   **Hinweis:** Wie hängt $x^n$ von $x^{n'}$ ab, wenn $n'$ durch Weglassen der letzten Stelle von $n$ definiert ist, wenn also $\mathrm{bin}(n') = n_1 \ldots n_{k-1}$?

b) Beweisen oder widerlegen Sie: Die binäre Methode ist optimal, das heißt sie liefert für jedes $n$ eine Berechnungsvorschrift mit einer minimalen Anzahl von Multiplikationen.

c) Berechnen Sie die Anzahl der Multiplikationen zur Berechnung von $x^n$ nach der binären Methode in Abhängigkeit von $n$. Charakterisieren Sie den Worst-Case.

## 13. Aufgabe

| | a) |
|---|---|
| **Track $\varepsilon$** | 4 |
| **Track AI** | 4 |

Berechnen Sie mit Hilfe von amortisierten Kosten eine möglichst scharfe obere Schranke für die Gesamtkosten (gemessen in der Anzahl der modifizierten Ziffern) des Zählens von 0 nach $n$ bei einer Zahlendarstellung zur Basis $b$.

## 14. Aufgabe

| | a) | b) | c) |
|---|---|---|---|
| **Track $\varepsilon$** | 2 | 3 | 4 |
| **Track AI** | 2 | [3] | [4] |

Lösen Sie folgende Rekursionsgleichungen durch Iteration (Vermutungen sind zu beweisen):

a) $A(0) = 1$; $A(1) = 1$; $A(n) = 3 \cdot A(n-2) + 5$, $n \geq 2$

b) $B(0) = c$; $B(1) = c$; $B(n) = 2 \cdot B(n-2) + 3n$, $n \geq 2$

c) $C(0) = 2$; $C(n) = n \cdot C(n-1) + n$, $n \geq 1$

## 15. Aufgabe

| | a) | b) | c) | d) |
|---|---|---|---|---|
| **Track $\varepsilon$** | 1 | 1 | 1 | 2 |
| **Track AI** | 1 | 1 | 1 | [2] |

Lösen Sie folgende Rekursionsgleichungen mit Hilfe des Mastertheorems!

a) $A(1) = 1$; $A(n) = \frac{5}{2} \cdot A(\frac{n}{2}) + \frac{n}{2}$, $n \geq 2$.

b) $B(1) = 6$; $B(n) = B(\frac{n}{3}) + n - 1$, $n \geq 3$.

c) $C(1) = 1$; $C(n) = 4 \cdot C(\frac{n}{2}) + 7 \cdot \left(\frac{n}{2}\right)^2$, $n \geq 2$.

d) Welche Annahmen müssen Sie für a) – c) machen, damit Sie sinnvoll arbeiten können? Wann sind diese Annahmen gerechtfertigt?

# 16. Aufgabe

| | a) | b) |
|---|---|---|
| **Track $\varepsilon$** | [5] | [5] |
| **Track AI** | [5] | [5] |

Betrachten Sie die folgende (schematische) Rekursionsgleichung:

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + f(n) \; .$$

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Wenn $f \in \Theta(n^2)$, dann gilt $T \in \Theta(f)$.

b) Wenn $f \in \Omega(n^2)$, dann gilt $T \in \mathcal{O}(f)$.