Ausgabedatum: 26.10.2012
Version: 2012-10-24 17:31

2. Übungsblatt zur Übung Beweistechniken, WS 12/13

Abgabe: *Bis Freitag, 02.11.2012, 12:00 Uhr, Abgabenkasten vor 48-694.*

Hinweis: Machen Sie bei ihren Beweisen jeweils kenntlich, was zu welchem Bestandteil gehört.

4. Aufgabe

3 + 2 Punkte

a) Beweisen Sie folgende Aussage durch vollständige Fallunterscheidung:

Eine Marktfrau hat eine Balkenwaage und (beliebig viele) Gewichte zu 3 g und 5 g, die nur in die linke Waagschale gelegt werden dürfen (Gesundheitsamt ...). Behauptung: Die Marktfrau kann jedes ganzzahlige Gewicht $G \geq 8\,\mathrm{g}$ abwiegen.

Hinweis: Betrachten Sie das abzuwiegende Gewicht modulo einer geeignet gewählten Zahl und unterscheiden Sie Fälle, je nachdem welcher Rest bleibt.

b) Wie ändert sich der Beweis für Teil a), wenn das Gewicht zu 5 g durch ein Gewicht zu 4 g ersetzt wird.

5. Aufgabe

2 + 2 + 2 + [2] Punkte

Beweisen Sie folgende Aussagen durch Induktion.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

c) $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$ für $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$.

d) Die *Türme von Hanoi* mit n Scheiben können in $2^n - 1$ Schritten gelöst werden.

Eine anschauliche Beschreibung der Türme von Hanoi ist auf Wikipedia zu finden
`http://de.wikipedia.org/wiki/T%C3%BCrme_von_Hanoi`

6. Aufgabe

1 Punkt

Zeigen Sie durch Inklusion in beide Richtungen:
(Zur Erinnerung: Für zwei Mengen A und B ist $A = B$ äquivalent zu $A \subseteq B \ \wedge \ A \supseteq B$.)

$$\{n \in \mathbb{N} \mid 2|n\} \ \cap \ \{n \in \mathbb{N} \mid 3|n\} \quad = \quad \{n \in \mathbb{N} \mid 6|n\}$$

7. Aufgabe

2 Punkte

Zeigen Sie folgende Äquivalenz, indem Sie die Implikation in beide Richtungen beweisen:

$$f = \mathcal{O}(g) \iff g = \Omega(f)$$

(Verwenden Sie hierfür **nicht** Lemma 1.4 aus dem EAA-Buch, sondern direkt die Definitionen der Landau-Symbole.)

8. Aufgabe

[3] Punkte

Zeigen Sie durch vollständige Fallunterscheidung:

Für $n \in \mathbb{N}$ (d. h. $n > 0$) gilt: $7 \mid (n^7 - n)$.