TECHNISCHE UNIVERSITÄT
KAISERSLAUTERN

Fachbereich Informatik
AG Algorithmen und Komplexität

Ausgabedatum: 19.10.2012
Version: 2012-10-18 17:34

# 1. Übungsblatt zur Übung Beweistechniken, WS 12/13

***Abgabe:*** *Bis Freitag, 26.10.2012, 12:00 Uhr, Abgabenkasten vor 48-694.*

## Übungskonzept

Die Bearbeitung der Übungen *Beweistechniken* ist Zulassungsvoraussetzung zur Abschlussklausur des Moduls *Entwurf und Analyse von Algorithmen für Angewandte Informatiker*.
Es gelten folgende Regeln:

- Es müssen auf **jedem einzelnen Blatt** 50 % der Punkte erreicht werden, die es auf Pflichtaufgaben gibt.
- Punkte gibt es für sinnvoll bearbeitete Aufgaben. Insbesondere müssen *nicht* zwingend 50 % der Aufgaben korrekt gelöst werden, um die Zulassung zu erreichen.

  Die Pflichtpunkte sind bei jeder Aufgabe angegeben – evtl. separat für die jeweiligen Teilaufgaben.
- Über freiwillige Aufgaben können Zusatzpunkte gesammelt werden.
  Freiwillige (Teil-) Aufgaben sind daran zu erkennen, dass ihre Punktzahl [eingeklammert] ist.

**Hinweis:** Machen Sie bei ihren Beweisen jeweils kenntlich, was zu welchem Bestandteil gehört. Gemeint sind die drei Bestandteile, die in der Vorlesung eingeführt wurden:

- *Anfang:* Hier sollen Sie bekannte Voraussetzungen und benutzte Definitionen und Resultate sammeln, sowie das Ziel des Beweises angeben.
- *Mitte:* Dieser Bestandteil enthält die eigentliche Argumentationskette, aus der die Behauptung folgt. Dazu gehört auch die explizite Angabe des Beweis-Schemas, z. B. "direkter Beweis" oder "Beweis durch Widerspruch".
- *Ende:* Hier machen Sie nochmals explizit, was soeben gezeigt wurde und beenden den Beweis mit "$\square$".

# 1. Aufgabe

$1 + 2$ Punkte

Zeigen Sie direkt:

a) Die Summe von 3 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist durch 3 teilbar.

b) Für ungerade $n$ ist die Summe von $n$ aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen durch $n$ teilbar.

# 2. Aufgabe

$1 + 1 + 1 + [2]$ Punkte

Zeigen Sie durch Kontraposition (d. h. indirekten Beweis):

a) Sei $x \in \mathbb{R}$. Aus $\frac{x}{x^2+1} > 2$ folgt $x > 0$.

b) Für eine Folge $(a_i)_{i \geq 1}$ gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty \quad \Longrightarrow \quad \lim_{i \to \infty} a_i = 0 \; .$$

c) *[Lineare Unabhängigkeit ist stabil bzgl. $\subseteq$]*

Wenn die Vektoren $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linear unabhängig sind, dann sind auch die Vektoren $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ linear unabhängig.

d) *[Reduktion]*

Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine `While`-berechenbare Funktion. Dann gilt:
Wenn $f \circ g$ *nicht* `While`-berechenbar ist, dann ist auch $f$ selbst *nicht* `While`-berechenbar.

## 3. Aufgabe

$1 + 3 + [3]$ Punkte

Zeigen Sie jeweils mit einem Widerspruchsbeweis:

a) Sei $U$ eine *unendliche* Menge, $E \subset U$ eine *endliche* Teilmenge von $U$.

Das Komplement $\overline{E} := U \setminus E$ von $E$ bezüglich $U$ ist unendlich.

b) $\sqrt{2}$ ist irrational.

**Tipp 1** Wenn $x$ *nicht* irrational ist, dann gibt es *teilerfremde* $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $q > 0$ und $x = \frac{p}{q}$.

**Tipp 2** Sie dürfen folgenden Fakt ohne Beweis verwenden:

$$\forall n \in \mathbb{N} \Big( n \text{ gerade } \iff n^2 \text{ gerade} \Big) \ .$$

c) *[Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$]*

Sei $\mathbb{B}^\omega := \left\{ b_1 b_2 b_3 \cdots \mid \forall i \in \mathbb{N} : b_i \in \{0, 1\} \right\}$ die Menge aller *unendlichen* Binärstrings.

Zeigen Sie, dass $\mathbb{B}^\omega$ nicht *abzählbar* ist.

Dabei ist eine Menge $M$ genau dann abzählbar, wenn es eine *injektive* Funktion $f : M \to \mathbb{N}$ gibt.

**Tipp:** Anschaulich ist eine Menge $M$ abzählbar, wenn man alle ihre Elemente in einer Liste untereinander schreiben kann. Denn dann können wir $f$ wählen, indem wir für jedes Element $m \in M$ einfach $f(m)$ auf die Zeilennummer in der Liste setzen.
Zeigen Sie, dass eine solche Liste der Elemente von $\mathbb{B}^\omega$ unvollständig ist, indem Sie ein Element konstruieren, das in der Liste fehlt.