TECHNISCHE UNIVERSITÄT KAISERSLAUTERN

Fachbereich Informatik
AG Algorithmen und Komplexität

Ausgabedatum: 18.10.2012
Version: 2012-10-18 15:14

2. Übungsblatt zur Vorlesung Entwurf und Analyse von Algorithmen, WS 12/13

Abgabe: *Bis Donnerstag, 25.10.2012, 12:00 Uhr, Abgabenkasten vor 48-694.*

5. Aufgabe

	a)	b)	c)
Track ε	1	2	[3]
Track AI	1	2	3

Schätzen Sie für festes `m>1` die Worst-Case Laufzeiten (in $\mathcal{O}$-Notation) folgender Prozeduren in Abhängigkeit von `n` möglichst genau ab.

a)
```
PROCEDURE sort(VAR A:ARRAY OF CARDINAL);
VAR i,j,k,n:CARDINAL;
BEGIN
n:=HIGH(A);
FOR i:=0 TO n-1 DO
    FOR j:=n TO i+1 BY -1 DO
        IF A[j-1]>A[j] THEN k:=A[j-1]; A[j-1]:=A[j]; A[j]:=k; END;
    END;
END;
END sort;
```

b)
```
PROCEDURE proc(VAR i:CARDINAL; n,m:CARDINAL);
VAR j:CARDINAL;
BEGIN
i:=0;
j:=m;
WHILE (j<=n) DO
    j:=m*j;
    i:=i+1;
END;
END proc;
```

c) Nehmen Sie an, dass `A` ein Array der Größe `n` ist, und dass für alle Elemente $\texttt{A}[i] \in [1..\texttt{m}]$, $1 \leq i \leq \texttt{n}$, gilt. Außerdem sei `B` ein Array der Länge `m`, dessen Einträge mit 0 initialisiert sind.

```
PROCEDURE distsort(VAR A: ARRAY OF CARDINAL);
VAR i,j,k : CARDINAL;
BEGIN
FOR i:=1 TO n DO
    B[A[i]] := B[A[i]] + 1
END
k:=1
FOR j:=1 TO m DO
    FOR i:=1 TO B[j] DO
        A[k] := j
        k := k + 1
    END
END
END distsort;
```

6. Aufgabe

	a)	b)	c)	d)
Track ε	1	[1]	2	2
Track AI	1	[1]	1	1

Benennen Sie alle Fehler in den folgenden Herleitungen. Leiten Sie außerdem – sofern möglich – korrekte $\mathcal{O}$- bzw. Θ-Schranken her und schreiben Sie Ihre Herleitungen *ohne Notationsmissbrauch*[1] auf.

a)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\ln(n) &= \ln(n)\left(\sum_{i=1}^{n}2i - \sum_{i=1}^{n}1\right)\\ &= 2\ln(n)\sum_{i=1}^{n}i - n\ln(n)\\ &= 2\ln(n)\frac{1}{2}n(n+1) - n\ln(n)\\ &= n^2\ln(n)\\ &\in \Theta(n^2\ln(n))\end{aligned}$$

b)

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}n = n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = n\cdot c \in \mathcal{O}(n)$$

[1] Also ohne "=" von und Arithmetik mit Landautermen; "$7n+3 = \mathcal{O}(n)+\mathcal{O}(1) = \mathcal{O}(n)$" wäre demnach nicht zulässig.

c)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k\mathcal{O}(n) &= \sum_{k=1}^{n} \mathcal{O}(kn) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathcal{O}(n) \\ &= n\mathcal{O}(n) \\ &= \mathcal{O}(n^2)\end{aligned}$$

d)

$$2^{3n} = 2^{\mathcal{O}(n)} = \mathcal{O}(2^n)$$

Hinweis: Wir verstehen hier $\mathcal{O}$ immer für $n \to \infty$.

7. Aufgabe

	a)	b)
Track ε	3	[5]
Track AI	[3]	[5]

a) Beweisen Sie Teil e) von Lemma 1.4 im Buch (Seite 15).

b) Teile a) – c) von Lemma 1.4 gelten in beide Richtungen – dort könnte also "genau dann, wenn" stehen – da sie genau zu Punkten 4. – 6. in Definition 1.8 passen. Wie kann man Lemma 1.4 modifizieren, damit auch d) – f) zu Definition 1.8 äquivalent werden?

Hinweis: Finden Sie zwei Funktionen f, g mit $f \in \mathcal{O}(g)$, sodass $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ nicht existiert?

8. Aufgabe

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)
Track ε	2	1	1	1	1	1	[2]	[1]
Track AI	2	1	1	1	1	1	[2]	[1]

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) $\sqrt[n]{n} = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln^2(n)}{n^2}\right)$

Hinweis: $\ln^2(n)$ ist kurz für $(\ln(n))^2$, und nicht etwa $\ln(\ln(n))$.

b) $\sqrt[n]{n} = \mathcal{O}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$

c) $\sqrt[n]{n} = o(1)$

d) $\sqrt[n]{n} = \mathcal{O}(1)$

e) $3^n = \mathcal{O}(2^n)$

f) $2^n = \mathcal{O}(3^n)$

g) $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$

h) $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \Omega\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)$

9. Aufgabe

Track ε [5]
Track AI [5]

Zeigen Sie, dass

$$f(n) := \sum_{i=3}^{\frac{n}{2}} \frac{1}{i} \left(\frac{i}{n}\right)^i = \mathcal{O}(n^{-3}) \; .$$

Hinweis: Der Nachweis gelingt durch geschicktes Zerlegen der Summe in Teilsummen.

10. Aufgabe

Track ε 3
Track AI 3

Betrachten Sie alle möglichen Paare (g_i, g_j) mit $1 \leq i, j \leq 10$ aus den untenstehenden Funktionen und geben Sie die jeweils stärkste gültige Beziehung aus $\mathcal{O}, \Omega, \Theta, o, \omega$ und $\sim$ an.

$$g_1(n) = \ln(\ln(n)) \quad g_2(n) = \ln^2(n) \quad g_3(n) = \tfrac{n}{\ln(n)} \quad g_4(n) = \tfrac{\ln(n)}{n} \quad g_5(n) = \sqrt{n}\ln^2(n)$$
$$g_6(n) = \left(\tfrac{2}{3}\right)^n \quad g_7(n) = \left(\tfrac{3}{2}\right)^n \quad g_8(n) = n \quad g_9(n) = \sqrt{n} \quad g_{10}(n) = \ln(n)$$

Zeigen Sie exemplarisch (pro Beziehungstyp einmal), wie die Beziehungen bewiesen werden können.

Hinweis: Können Sie sich Schreib- und Beweisarbeit sparen?