1. Übungsblatt zur Vorlesung Algorithmen der Bioinformatik (Teil 2), WS 12/13

Abgabe: *Spätestens Montag, 29.10.2012, 10:00 Uhr,*
Email an `s_wild@cs...` *oder in der Vorlesung.*

1. Aufgabe

4 Punkte

Betrachten Sie das folgende *Bernoulli-Spiel* mit den Spielern Alice und Bob: Alice wählt ein Wort $a \in \{0,1\}^k$. Bob kennt a und wählt seinerseits ein Wort $b \in \{0,1\}^k$, $b \neq a$. Danach wird ein zufälliges $0-1$ Wort $s = s_1 s_2 \cdots$ erzeugt, wobei $\Pr[s_i = 0] = \Pr[s_i = 1] = \frac{1}{2}$ für alle i gilt. Es gewinnt der Spieler, dessen Wort zuerst als Teilwort von s auftritt. Wir sagen, dass Bob gewinnt, falls

$$\Pr[b \text{ kommt zuerst vor}] > \Pr[a \text{ kommt zuerst vor}].$$

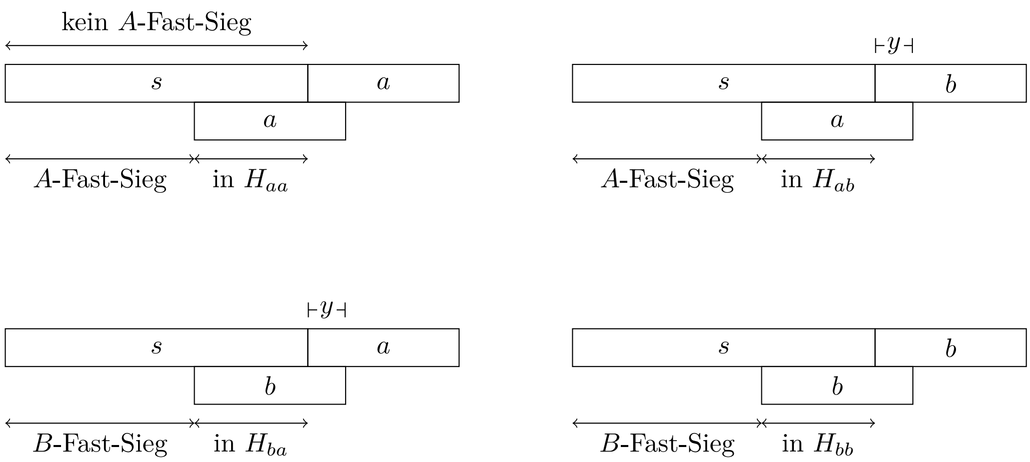
Ein Wort s heißt A-Sieg genau dann, wenn b nicht in s und a genau einmal in s, und zwar als Suffix, vorkommt. Ein A-Fast-Sieg ist ein Wort s, so dass $s \cdot a$ ein A-Sieg ist. Wir bezeichnen die Menge aller A-Fast-Siege mit S_a. Analog sind B-Siege, B-Fast-Siege und die Menge S_b definiert. Für zwei Mengen X und Y von Wörtern sei wie üblich

$$X \cdot Y := \{x \cdot y \mid x \in X \wedge y \in Y\}.$$

Weiter sei für zwei Wörter a und b die Menge H_{ab} als

$$H_{ab} := \{x \mid a = x \cdot y \text{ und } y \text{ ist ein Präfix von } b \text{ mit } y \neq \varepsilon\}$$

definiert.



a) Sei $S := \{s \in \{0,1\}^\star \mid \text{weder } a \text{ noch } b \text{ ist ein Teilwort von } s\}$. Zeigen Sie, dass

$$S = (S_a \cdot H_{aa}) \cup (S_b \cdot H_{ba}) \text{ und } S = (S_b \cdot H_{bb}) \cup (S_a \cdot H_{ab})$$

gilt.

b) *Conway's Ungleichung* besagt, dass Bob (mit seinem Wort b) genau dann gewinnt, wenn

$$P_{aa} - P_{ab} > P_{bb} - P_{ba}$$

gilt, wobei $P_{ab} := \sum_{u \in H_{ab}} 2^{-|u|}$. Beweisen Sie diese Ungleichung.

Hinweis: Benutzen Sie a).

2. Aufgabe

4 Punkte

Betrachten Sie das Spiel aus der 1. Aufgabe und beweisen Sie, dass Bob für $k \geq 3$ immer gewinnen kann.

Hinweis: Verwenden Sie Conway's Ungleichung.
Wenn $a = a_1 a_2 \cdots a_k$ gilt, dann versuche $b = ? \cdot a_1 \cdots a_{k-1}$.

3. Aufgabe

3 Punkte

Wir betrachten eine unfaire Münze, die mit Wahrscheinlichkeit p "Kopf" (abgekürzt als K) und mit Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ "Zahl" (abgekürzt als Z) liefert. Wie lange müssen wir im Erwartungswert diese Münze werfen, bis zu ersten mal das Muster ZKZZK erscheint? Bestimmen Sie außerdem die zugehörige Varianz als Funktion in p.

4. Aufgabe

4 Punkte

(Der Stoff für diese Aufgabe wird erst in der Vorlesung am Montag, 21. Oktober behandelt.)

Wir betrachten die in der Vorlesung behandelte Datenstruktur (mit Binärzahlen markierter erweiterter Binärbaum) zur effizienten Lösung des *lce*-Problems auf Basis eines kompakten Suffixbaumes. Sei dabei $h(k)$ die Position (gezählt von rechts) der am wenigsten signifikanten 1 in der Binärdarstellung von k (so ist beispielsweise $h(8) = 4$ und $h(5) = 1$).

Finden Sie eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür, dass i ein Vorgänger von j ist, welche auf der Kenntnis von $h(i)$ und $h(j)$ basiert.