

# Beispielanwendung für den Satz von Rice

Sebastian Wild und Markus E. Nebel

13. März 2012

Behauptung: Die Menge  $A := \{x \in \mathbb{N}_0 : \exists y \in \mathbb{N}_0 F_x^{\mathcal{G}_1}(y) \text{ undef.}\}$ , d. h. die Menge aller Indizes von einstelligem, berechenbaren, nicht-totalen Funktionen, ist nicht rekursiv/entscheidbar.

**Beweis:** via Satz von RICE. Prüfen wir also die Voraussetzungen:

(1)  $A$  ist eine Indexmenge.

Die Aussage in der Definition von  $A$  betrifft nur die Funktion  $F_x^{\mathcal{G}_1}$ , nicht  $x$  selbst. Damit ist  $A$  die Indexmenge der Funktionenklasse  $P := \{f \in \mathcal{R}_1 : \exists y \in \mathbb{N}_0 f(y) \text{ undef.}\}$ , enthält also alle Indizes aller Funktionen aus  $P$  und keine anderen.

*Formal:* Wir müssen zeigen:  $\forall i, j \in \mathbb{N}_0 F_i^{\mathcal{G}} \cong F_j^{\mathcal{G}} \leadsto (i \in A \iff j \in A)$ .

Seien also  $i$  und  $j$  zwei beliebige Indizes einer Funktion  $f = F_i^{\mathcal{G}} = F_j^{\mathcal{G}}$ . Dann gilt

$$i \in A \iff \exists y : F_i^{\mathcal{G}}(y) \text{ undef.} \iff \exists y : F_j^{\mathcal{G}}(y) \text{ undef.} \iff j \in A.$$

(2)  $P \subseteq \mathcal{R}$  gilt nach Definition von  $P$  bzw. weil  $\mathcal{G}$  eine Gödelisierung von  $\mathcal{R}$  ist.

(3)  $\emptyset \neq P \neq \mathcal{R}$ .

Es genügt, zwei Funktionen  $f, g \in \mathcal{R}_1$  (Menge der einstelligen Funktionen aus  $\mathcal{R}$ ) anzugeben mit  $f \in P$  und  $g \notin P$ . Damit ist  $P$  nicht-trivial. Wir wählen  $f = \Phi_1$  die einstellige nirgends definierte Funktion und  $g = C_1^0$ , die einstellige konstante 1-Funktion und prüfen:

(3.1)  $f \in P$ , da z. B.  $f(0)$  undefiniert ist.

(3.2)  $g \notin P$ , da  $g$  total ist.

Damit ist der Satz von RICE anwendbar und es folgt, dass  $A$ , die Indexmenge von  $P$ , nicht rekursiv ist. □

*Bemerkung:* Ist  $\emptyset \subsetneq P \subsetneq \mathcal{R}$ , so natürlich auch  $\emptyset \subsetneq \bar{P} \subsetneq \mathcal{R}$  mit  $\bar{P} := \mathcal{R} \setminus P$ . Also folgt aus unserem Beweis sofort, dass

$$\bar{A} := \{x \in \mathbb{N}_0 : \neg \exists y \in \mathbb{N}_0 F_x^{\mathcal{G}_1}(y) \text{ undef.}\} = \{x \in \mathbb{N}_0 : F_x^{\mathcal{G}_1} \text{ total}\}$$

ebenfalls nicht rekursiv ist.