Jenseits des erweiterten Satzes von Rice

Sebastian Wild und Markus E. Nebel

13. März 2012

Notation

- Für eine beliebige $n+1$-stellige Funktion g schreiben wir F_i^g für die Funktion definiert durch $F_i^g(\vec{x}) := g(i,\vec{x})$.
- Schreibe $\mathfrak{I}P := \left\{ i \in \mathbb{N}_0 : F_i^{\mathscr{G}} \in P \right\}$ für die Indexmenge einer Funktionenklasse P.

Behauptung: Die Menge

$$A := \left\{ x \in \mathbb{N}_0 : F_x^{\mathscr{G}} \text{ total und wächst höchstens so schnell wie } A_{17} \right\}$$

ist nicht rekursiv aufzählbar.

Um damit sauber umzugehen, definieren wir zuerst, was genau mit dem zweiten Teil gemeint sein soll: Wir sagen, eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *wächst höchstens so schnell wie* A_6, kurz $f \preccurlyeq A_{17}$, wenn

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{A_6(x)} < \infty.$$

Beweis: Wir stellen enttäuscht fest: Der erweiterte Satz von Rice ist nicht anwendbar! A ist zwar die Indexmenge der nicht-trivialen Funktionenklasse

$$P := \left\{ f \in \mathscr{R}_1 : f \text{ total} \wedge f \preccurlyeq A_{17} \right\},$$

aber da alle Funktionen in P total sind, finden wir kein $f \in P$ mit $f \subsetneq h$ (egal wie h aussieht!). Immerhin liefert uns der einfache Satz von Rice, dass A nicht entscheidbar ist.

Was nun? Ist A womöglich doch aufzählbar?
Der Beweis gelingt über einen anderen Weg:

Definition (Nummerierung):
Eine $n+1$-stellige Funktion $g \in \mathscr{R}_{n+1}$ heißt Nummerierung der Funktionenklasse

$$F^g := \left\{F_i^g : i \in \mathbb{N}_0\right\}$$

wobei F_i^g die Funktion $F_i^g(\vec{x}) := g(i,\vec{x})$, die i-te Funktion in der Nummerierung g, ist.

Eine Funktionenklasse $P \subseteq \mathscr{R}_n$ heißt nummerierbar, wenn es eine Nummerierung $g \in \mathscr{R}_{n+1}$ gibt mit $F^g = P$.

Lemma: Sei $P \subseteq \mathscr{R}_n$. Dann gilt: $\Im P$ rekursiv aufzählbar $\curvearrowright$ P nummerierbar.

Beweis: Sei $\Im P$ rekursiv aufzählbar, d. h. es gibt $c \in \mathscr{T}_1$ mit Bildbereich $\Im P$.

Definiere $g(i,\vec{x}) := F_{c(i)}^{\mathscr{G}}(\vec{x})$. Offensichtlich ist $g \in \mathscr{R}_{n+1}$ und $F^g = P$, also ist P nummerierbar. □

Wir zeigen nun, dass $P = \left\{f \in \mathscr{R}_1 : f \text{ total} \wedge f \preccurlyeq A_{17}\right\}$ nicht nummerierbar ist. Nach obigem Lemma ist A dann auch nicht rekursiv aufzählbar.

Nehmen wir nun an, P sei nummerierbar, d. h. es gäbe eine Funktion $g \in \mathscr{R}_2$ mit $F^g = P$. Definiere

$$d(x) := \begin{cases} 0 & F_x^g(x) > 0, \\ 1 & F_x^g(x) = 0. \end{cases}$$

Offensichtlich ist $d \in \mathscr{R}_1$ und total. Mit $\forall x : A_{17}(x,x) \geq 1$ gilt außerdem $d \preccurlyeq A_{17}$. Also ist $d \in P$. Andererseits ist aber $\forall x : d(x) \neq F_x^g(x)$, also insbesondere $\forall x : d \not\cong F_x^g$, d. h. $d \notin F^g$
$\lightning$ $F^g = P$.

Also ist P nicht nummerierbar und folglich $\Im P = A$ nicht rekursiv aufzählbar. □