Umwandlung eines NEA in einen DEA

nach dem Verfahren aus dem Buch

Sebastian Wild und Markus E. Nebel

13. März 2012

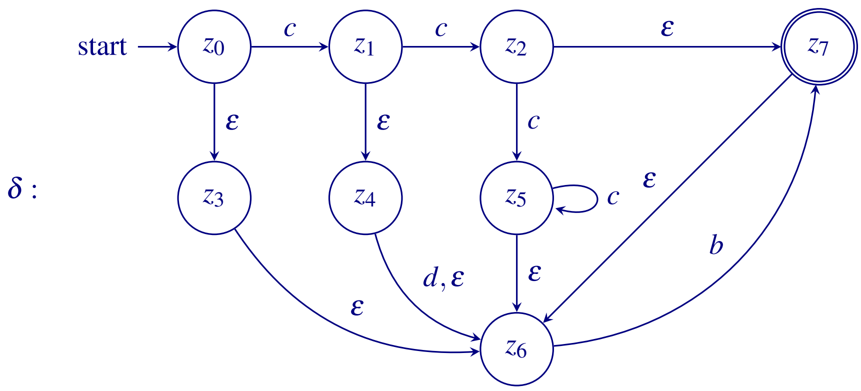
Gegeben ist ein NEA [evtl. mit ε-Übergängen] $A = (Z, T, \delta, z_0, E)$. Mit folgendem Verfahren konstruiert man einen äquivalenten DEA

$$B = (Q, \Sigma, \phi, q_0, F) = \big(\wp(Z), T, \phi, q_0, \{M \in \wp(Z) \mid M \cap E \neq \emptyset\}\big)\,,$$

d. h. es gilt $T(A) = T(B)$.

[Der Beweis für die Korrektheit des Verfahrens steckt im Beweis zu Satz 2.2.]

Zur Veranschaulichung haben wir einen Beispielautomaten mit dem Verfahren umgewandelt. Der Automat $A = \big(\{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7\}, \{b, c, d\}, \delta, z_0, \{z_7\}\big)$ habe folgenden Übergangsgraph:



1 Das Verfahren

(1) Bestimmung von $\mathscr{E}_0$

Dazu kopiert man aus der Übergangstabelle die Zustände und die ε-Spalte oder schreibt für jeden Zustand die Ziele der ε-Übergänge auf. $\mathscr{E}_0$ gibt also an, zu welchen Zuständen ein gegebener Zustand einen ε-Übergang hat.

Die Tabelle schreiben wir in zwei Hälften nebeneinander . . . das spart Platz.

$\mathscr{E}_0$:

	ε		ε
z_0	z_3	z_4	z_6
z_1	z_4	z_5	z_6
z_2	z_7	z_6	
z_3	z_6	z_7	z_6

(2) Bilden der reflexiv-transitiven Hülle $\mathscr{E}$

Man beginnt mit der Starttabelle $\mathscr{E}^{(0)}$, in der einfach jeder Zustand eine Zeile bekommt und dort zweimal hintereinander geschrieben wird.

$\mathscr{E}^{(0)}$:

	ε		ε
z_0	z_0	z_4	z_4
z_1	z_1	z_5	z_5
z_2	z_2	z_6	z_6
z_3	z_3	z_7	z_7

Dann wiederhole folgendes Vorgehen, bis keine Änderung mehr vorgenommen wird:

Bilde $\mathscr{E}^{(n+1)}$, $n \geq 0$, indem in $\mathscr{E}^{(n)}$ jedes z_j in der rechten Spalte durch $z_j, \mathscr{E}_0(z_j)$ ersetzt wird, wobei $\mathscr{E}_0(z_j)$ den Inhalt der rechten Spalte der Zeile in $\mathscr{E}_0$ bezeichnet, in der links z_j steht. [man stelle sich $\mathscr{E}_0$ als Abbildung $\mathscr{E}_0 : Z \to \wp(Z)$ vor]

$\mathscr{E}^{(1)}$:

	ε		ε
z_0	z_0,z_3	z_4	z_4,z_6
z_1	z_1,z_4	z_5	z_5,z_6
z_2	z_2,z_7	z_6	z_6
z_3	z_3,z_6	z_7	z_7,z_6

$\mathscr{E}^{(2)}$:

	ε		ε
z_0	z_0,z_3,z_6	z_4	z_4,z_6
z_1	z_1,z_4,z_6	z_5	z_5,z_6
z_2	z_2,z_7,z_6	z_6	z_6
z_3	z_3,z_6	z_7	z_7,z_6

Ein weiterer Schritt ändert nichts mehr, d. h. $\mathscr{E}^{(2)} = \mathscr{E}^{(3)} = \mathscr{E}^{(4)} \ldots$

Die letzte Tabelle, die man so erhält ist das gewünschte $\mathscr{E}$. Diese gibt nun für jeden Zustand an, welche Zustände durch Verfolgen von beliebig vielen – d. h. auch gar keinen! – ε-Übergängen erreichbar sind.

$\mathscr{E} = \mathscr{E}^{(2)}$:

	ε
z_0	z_0, z_3, z_6
z_1	z_1, z_4, z_6
z_2	z_2, z_7, z_6
z_3	z_3, z_6

	ε
z_4	z_4, z_6
z_5	z_5, z_6
z_6	z_6
z_7	z_7, z_6

(3) Bestimmen des Startzustandes q_0

Der Startzustand von B ist $\mathscr{E}(z_0)$. Schließlich kann der Automat A beliebig viele ε-Übergänge benutzen, bevor er das erste Eingabesymbol liest.

$q_0 = \mathscr{E}(z_0) = \{z_0, z_3, z_6\}$

(4) Sukzessives Bestimmen von ϕ

Nach Definition ist ϕ eine Abbildung $\phi : \wp(Z) \times T \to \wp(Z)$, die also streng genommen auf *allen* Teilmengen von Z definiert sein muss. Oft sind aber viele dieser $2^{|Z|}$ formalen Zustände vom Startzustand überhaupt nicht erreichbar. Deshalb erlaubt man sich die Bequemlichkeit, ϕ nur auf den Zuständen zu definieren, die tatsächlich erreichbar sind.

Woher weiß ich nun, ob ein Zustand erreichbar ist?
A priori wissen wir das nicht; mit dem folgenden Verfahren kann man ϕ aber so bestimmen, dass man nur genau die notwendigen Teilmengen betrachtet:

(a) Wir beginnen die Tabelle für ϕ mit dem Startzustand in der linken Spalte und je einer leeren Spalten für jedes $a \in T$ rechts davon.

(b) Suche eine Teilmenge von Z, die in der Tabelle vorkommt, aber noch keine vollständig gefüllte Zeile hat. [Dies ist zu Beginn der Startzustand, später kommen evtl. neue dazu.]

- Gibt es keine weitere Teilmenge mehr, so ist ϕ komplett. Alle weiteren Teilmenge sind nicht erreichbar. $\curvearrowright$ STOP!
- Wenn es eine weitere Teilmenge M gibt, so fülle die Zeile für M, indem (c) für jede Spalte, d. h. für alle Symbole $a \in T$, [einmal] ausführt wird. Anschließend beginne wieder bei (b).

(c) Schreibe in die Zelle der Teilmenge M und des Symbols a die Menge

$$M' = \left\{ z' \mid \exists z \in M \text{ mit } \big((z,a), z'\big) \in \delta \right\},$$

also anschaulich alle Zustände, die man erreichen kann, wenn A in *einem beliebigen* Zustand $z \in M$ das Symbol a liest.

Jetzt ersetze in der Menge M' jeden Zustand z_j durch $\mathscr{E}(z_j)$. Da die (neuen) zu bestimmenden Zustände Menge sind, müssen doppelt vorkommende (alte) Zustände z_i nicht mehrmals notiert werden. [Diese letzten beiden Schritte sind im Buch zu einem einzigen zusammengefasst.]

(a) $\phi: \begin{array}{c|ccc} & b & c & d \\ \hline \{z_0, z_3, z_6\} & & & \end{array}$

(b) $M = \{z_0, z_3, z_6\}$

(c) $a = b$

$$\phi: \begin{array}{c|ccc} & b & c & d \\ \hline \{z_0, z_3, z_6\} & \{z_7\} & & \end{array}$$

Jetzt müssen wir in $\{z_7\}$ alle Zustände durch die entsprechenden $\mathscr{E}$-Zustände ersetzen. In diesem Fall kommt dadurch z_6 hinzu, denn:

$$\mathscr{E}(z_7) = \{z_7, z_6\}$$

(c) $a = c$

$$\phi: \begin{array}{c|ccc} & b & c & d \\ \hline \{z_0, z_3, z_6\} & \{z_6, z_7\} & \{z_1\} & \end{array}$$

Es ist $\mathscr{E}(z_1) = \{z_1, z_4, z_6\}$, d. h. wir müssen die Menge M' um z_4, z_6 ergänzen:

$$\phi: \begin{array}{c|ccc} & b & c & d \\ \hline \{z_0, z_3, z_6\} & \{z_6, z_7\} & \{z_1, z_4, z_6\} & \end{array}$$

(c) $a = d$

$$\phi: \begin{array}{c|ccc} & b & c & d \\ \hline \{z_0, z_3, z_6\} & \{z_6, z_7\} & \{z_1, z_4, z_6\} & \{\} \end{array}$$

(b) Wir haben zwei neue Teilmengen bekommen, die abgearbeitet werden müssen. Beginnen wir mit $M = \{z_6, z_7\}$.

(c) $a = b$

$$\phi: \begin{array}{c|ccc} & b & c & d \\ \hline \{z_0, z_3, z_6\} & \{z_6, z_7\} & \{z_1, z_4, z_6\} & \{\} \\ \{z_6, z_7\} & \{z_7\} & & \end{array}$$

$z \to \mathscr{E}(z)$

$$\phi: \begin{array}{c|ccc} & b & c & d \\ \hline \{z_0, z_3, z_6\} & \{z_6, z_7\} & \{z_1, z_4, z_6\} & \{\} \\ \{z_6, z_7\} & \{z_7, z_6\} & & \end{array}$$

(c) $a = c$

$$\phi: \begin{array}{c|ccc} & b & c & d \\ \hline \{z_0, z_3, z_6\} & \{z_6, z_7\} & \{z_1, z_4, z_6\} & \{\} \\ \{z_6, z_7\} & \{z_7, z_6\} & \{\} & \end{array}$$

(c) $a = d$

ϕ :

	b	c	d
$\{z_0, z_3, z_6\}$	$\{z_6, z_7\}$	$\{z_1, z_4, z_6\}$	$\{\}$
$\{z_6, z_7\}$	$\{z_7, z_6\}$	$\{\}$	$\{\}$

(b) $M = \{z_1, z_4, z_6\}$

(c) $a = b$

ϕ :

	b	c	d
$\{z_0, z_3, z_6\}$	$\{z_6, z_7\}$	$\{z_1, z_4, z_6\}$	$\{\}$
$\{z_6, z_7\}$	$\{z_6, z_7\}$	$\{\}$	$\{\}$
$\{z_1, z_4, z_6\}$	$\{z_7\}$		

$z \to \mathscr{E}(z)$

ϕ :

	b	c	d
$\{z_0, z_3, z_6\}$	$\{z_6, z_7\}$	$\{z_1, z_4, z_6\}$	$\{\}$
$\{z_6, z_7\}$	$\{z_6, z_7\}$	$\{\}$	$\{\}$
$\{z_1, z_4, z_6\}$	$\{z_7, z_6\}$		

(c) $a = c$

ϕ :

	b	c	d
$\{z_0, z_3, z_6\}$	$\{z_6, z_7\}$	$\{z_1, z_4, z_6\}$	$\{\}$
$\{z_6, z_7\}$	$\{z_6, z_7\}$	$\{\}$	$\{\}$
$\{z_1, z_4, z_6\}$	$\{z_7, z_6\}$	$\{z_2\}$	

$z \to \mathscr{E}(z)$

ϕ :

	b	c	d
$\{z_0, z_3, z_6\}$	$\{z_6, z_7\}$	$\{z_1, z_4, z_6\}$	$\{\}$
$\{z_6, z_7\}$	$\{z_6, z_7\}$	$\{\}$	$\{\}$
$\{z_1, z_4, z_6\}$	$\{z_7, z_6\}$	$\{z_2, z_7, z_6\}$	

(c) $a = d$

ϕ :

	b	c	d
$\{z_0, z_3, z_6\}$	$\{z_6, z_7\}$	$\{z_1, z_4, z_6\}$	$\{\}$
$\{z_6, z_7\}$	$\{z_6, z_7\}$	$\{\}$	$\{\}$
$\{z_1, z_4, z_6\}$	$\{z_7, z_6\}$	$\{z_2, z_7, z_6\}$	$\{z_6\}$

Das Verfahren sollte damit hinreichend klar geworden sein. Daher geben wir hier gleich die vollständige Tabelle an, die entsteht, wenn man das Verfahren konsequent fortsetzt:

$$
\phi : \quad \begin{array}{c|ccc}
 & b & c & d \\
\hline
\{z_0, z_3, z_6\} & \{z_6, z_7\} & \{z_1, z_4, z_6\} & \{\} \\
\{z_6, z_7\} & \{z_6, z_7\} & \{\} & \{\} \\
\{z_1, z_4, z_6\} & \{z_6, z_7\} & \{z_2, z_6, z_7\} & \{z_6\} \\
\{z_2, z_6, z_7\} & \{z_6, z_7\} & \{z_5, z_6\} & \{\} \\
\{z_6\} & \{z_6, z_7\} & \{\} & \{\} \\
\{z_5, z_6\} & \{z_6, z_7\} & \{z_5, z_6\} & \{\}
\end{array}
$$

Man beachte, dass von den $2^8 = 256$ formalen Zuständen von B nur 6 verwendet werden!

(5) Bestimmen der Endzustände F

Wie bereits ganz zu Beginn erwähnt, sind genau all jene Teilmengen akzeptierende Zustände, die mindestens einen akzeptierenden Zustand von A enthalten.

Für unseren Automaten geben wir wieder nur diejenigen Zustände an, die vom Startzustand auch erreichbar sind. Das sind genau die 6 Zustände, die in der Tabelle für ϕ auftauchen:

$$
,F‘: \quad \begin{array}{c|c}
 & \text{akzeptierend?} \\
\hline
\{z_0, z_3, z_6\} & \\
\{z_6, z_7\} & \checkmark \\
\{z_1, z_4, z_6\} & \\
\{z_2, z_6, z_7\} & \checkmark \\
\{z_6\} & \\
\{z_5, z_6\} &
\end{array}
$$

$\curvearrowright$ $F = \big\{ \{z_6, z_7\}, \{z_2, z_6, z_7\} \big\}$

Damit sind alle Teile von B bestimmt. □

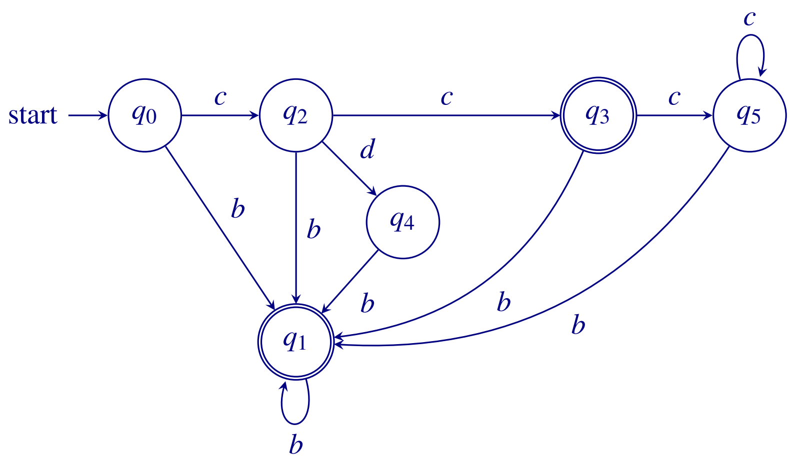
Benenne hier die Zustände noch um, damit sie kürzer zu schreiben sind. Die q_j entsprechen den Teilmengen in der Reihenfolge, in der sie in den Tabellen auftauchen.

Damit sieht unser DEA wie folgt aus:

$$
B = \big(\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{a, b\}, \phi, q_0, \{q_1, q_3\} \big)
$$

mit

ϕ :



P. S.

Der Automat aus dem Beispiel akzeptiert die Sprache

$$T(A) = T(B) = \{c\}^2 \{b\}^* \cup \{c\}^* \{b\}^+ \cup \{c\} \{d\} \{b\}^+ .$$