TECHNISCHE UNIVERSITÄT
KAISERSLAUTERN

Fachbereich Informatik
AG Algorithmen und Komplexität

Ausgabedatum: 29.01.2015
Version: 2015-01-28 14:55

12. Übungsblatt für alle Tracks zur Vorlesung Entwurf und Analyse von Algorithmen, WS 14/15

Abgabe: *Bis Freitag, 06.02.2015, 12:00 Uhr, Kasten im Treppenhaus 48-6.*

Basisaufgaben

B12.1: NP-Reduktionen: MAX-3SAT

3 Punkte

Betrachten Sie das Problem MAX-3SAT:

> **Eingabe:** Eine aussagenlogische Formel φ in 3-KNF und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.
>
> **Frage:** Gibt es eine Belegung α von φ gibt, sodass mindestens k Klauseln erfüllt sind?

Zeigen Sie, dass MAX-3SAT $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

B12.2: NP-Reduktionen: Partition

3 Punkte

Wir erweitern unseren Katalog $\mathcal{NP}$-vollständiger Probleme um zwei weitere:

Rucksack

> **Eingabe:** Natürliche Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_k, b \in \mathbb{N}$.
>
> **Frage:** Gibt es $I \subseteq [1..k]$ mit $\sum_{i \in I} a_i = b$?

Partition

> **Eingabe:** Natürliche Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{N}$.
>
> **Frage:** Gibt es $J \subseteq [1..n]$ mit $\sum_{i \in J} c_i = \sum_{i \in [1..n] \setminus J} c_i$?

Beweisen Sie, dass Partition $\mathcal{NP}$-hart ist, wenn Rucksack $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

B12.3: Eigenschaften von co-NP 3 Punkte

Wir definieren co-$\mathcal{NP}$ als die Menge all jener Sprachen L, deren Komplemente zur Klasse $\mathcal{NP}$ gehören, also formal

$$\text{co-}\mathcal{NP} := \{L \subseteq \Sigma^* \mid (\Sigma^* \setminus L) \in \mathcal{NP}\} .$$

a) Zeigen Sie: $\mathcal{P} \subseteq \text{co-}\mathcal{NP}$.

b) Zeigen Sie: $\mathcal{NP} \neq \text{co-}\mathcal{NP} \implies \mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.

B12.4: TAUT ist in co-NP 3 Punkte

Analog zum Problem SAT definieren wir das Problem TAUT:

Eingabe: Eine aussagenlogische Formel φ.

Frage: Ist φ eine *Tautologie*, d. h. ist φ für *alle* Variablenbelegungen α erfüllt?

Zeigen Sie: TAUT $\in$ co-$\mathcal{NP}$.

Nehmen Sie dazu eine (sinnvolle) Kodierung von Formeln als Strings über einem Alphabet Σ an, d. h. formal ist damit

$$\mathsf{TAUT} = \{w \in \Sigma^\star \mid \varphi(w) \text{ ist Tautologie}\},$$

wobei $\varphi(w)$ die von w kodierte Formel sei.

Aufbauaufgaben

A12.1: NP-Reduktionen: Clique 4 Punkte

Beweisen Sie, dass das Problem Clique $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

Verwenden Sie dabei als Reduktionspartner 3KNF-SAT.

A12.2: Knapsack 4 Punkte

Entwerfen Sie für das folgende, bekanntermaßen $\mathcal{NP}$-vollständige Problem Knapsack einen Algorithmus, dessen Laufzeit polynomiell in n, V und W beschränkt ist und dessen Speicherbedarf in $\mathcal{O}(V)$ liegt.

Eingabe: Volumina $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{N}$ und Werte $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{N}$ für die n Objekte $\{1, \ldots, n\}$, sowie zwei Zahlen $V, W \in \mathbb{N}$.

Frage: Gibt es eine Auswahl $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ der Objekte mit Gesamtvolumen $\sum_{i \in I} v_i \leq V$ und Gesamtwert $\sum_{i \in I} w_i \geq W$?

Zeigt Ihr Algorithmus, dass das Problem Knapsack in $\mathcal{P}$ liegt?

Begründen Sie Ihre Antwort präzise.

A12.3: NP-Reduktionen: Rucksack 4 Punkte

Beweisen Sie: Rucksack ist $\mathcal{NP}$-vollständig.