Ausgabedatum: 04.12.2014
Version: 2014-12-04 09:37

6. Übungsblatt für Track AI zur Vorlesung Entwurf und Analyse von Algorithmen, WS 14/15

Abgabe: *Bis Freitag, 12.12.2014, 12:00 Uhr, Kasten im Treppenhaus 48-6.*

Basisaufgaben

B6.1: Subtraktionsmethode 3 Punkte

Bestimmen Sie mit Hilfe der Subtraktionsmethode (diese haben wir bei der Analyse der Suchzeiten binärer Suchbäume kennengelernt) eine Rekursionsgleichung, die auf nur konstant viele Vorgänger zugreift und dieselbe Zahlenfolge erzeugt wie die nachfolgende Rekursionsgleichung mit Full History:

$$
\begin{aligned}
X_0 &= 1, \\
X_n &= 3 + \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} X_k, \quad n \geq 1 \ .
\end{aligned}
$$

B6.2: Rekursionsgleichungen und ERZ 3 Punkte

Lösen Sie folgende Rekursionsgleichung:

$$
\begin{aligned}
b_0 &= 1, \\
b_1 &= 1, \\
b_{i+2} &= 3 \cdot b_{i+1} - 2 \cdot b_i + 2^i, \quad i \geq 0,
\end{aligned}
$$

B6.3: Rekursionsgleichungen und Satz 3.3 3 Punkte

Verwenden Sie Satz 3.3, um folgende homogene lineare Rekursionsgleichungen zu lösen:

a) $a_1 = 1,$
$a_2 = 4,$
$a_i = 2 \cdot a_{i-1} + 3 \cdot a_{i-2}, \quad i \geq 3 \;.$

B6.4: Optimaler Suchbaum lineare Liste 3 Punkte

Seien für $n \in \mathbb{N}$ die Schlüsselmenge $A_n = \{1, \ldots, n\}$ und beliebige, aber feste Zugriffswahrscheinlichkeiten $P = (p_1, \ldots, p_n) \in [0,1]^n$ mit $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ gegeben. Wir nennen einen Suchbaum T für A (genau) dann optimal für P, wenn er unter allen Suchbäumen für A die erwarteten Suchkosten $\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \mathrm{niv}_T(i)$ minimiert.

Zeigen Sie: es gibt für unendlich viele Schlüsselfolgen A_n Wahrscheinlichkeitsgewichte P, sodass alle für P optimalen binären Suchbäume linear entartet sind, also Höhe n haben.

Aufbauaufgaben

A6.1: Pfadlängen in erweiterten Binärbäume 3 Punkte

Sei T ein erweiterter binärer Baum mit n inneren Knoten. Beweisen Sie, dass stets $\mathsf{EPL}(T) = \mathsf{IPL}(T) + 2n$ gilt.

A6.2: Random Permutation in BST Analyse 4 Punkte

Erläutern Sie, wo und wie in der Average-Case-Analyse der Suchkosten binärer Suchbäume das Permutationsmodell einfließt. Geben Sie insbesondere eine formale Begründung für die Gleichung

$$\mathbb{E}[\mathsf{CS_n}] = 1 + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[\mathsf{CU}_i]$$

auf Seite 122 im Buch an.

A6.3: Union/Find – Mengen ausgeben 3 Punkte

Erweitern Sie die aus der Vorlesung bekannte Datenstruktur für Partitionen, die Bäume und Pfadkomprimierung benutzt, um eine Operation `SET(x)`. Für ein beliebiges Element `x` soll `SET(x)` die Partition P_x, in der `x` enthalten ist, als (neue) lineare Liste zurückgeben; die Reihenfolge der Elemente im Ergebnis spielt keine Rolle.

Die Laufzeit von `SET(x)` soll in $\mathcal{O}(|P_x|)$ liegen. Weiterhin sollen die asymptotischen Laufzeiten der anderen Operationen nicht beeinträchtigt werden.

Begründen Sie Korrektheit und Effizienz Ihres Entwurfs.

Hinweis: Es genügt, jeden Knoten der Datenstruktur um ein Attribut zu erweitern.