Ausgabedatum: 04.12.2014
Version: 2014-12-04 09:37

6. Übungsblatt für Track ε zur Vorlesung Entwurf und Analyse von Algorithmen, WS 14/15

Abgabe: *Bis Freitag, 12.12.2014, 12:00 Uhr, Kasten im Treppenhaus 48-6.*

Basisaufgaben

B6.1: Subtraktionsmethode

3 Punkte

Bestimmen Sie mit Hilfe der Subtraktionsmethode (diese haben wir bei der Analyse der Suchzeiten binärer Suchbäume kennengelernt) eine Rekursionsgleichung, die auf nur konstant viele Vorgänger zugreift und dieselbe Zahlenfolge erzeugt wie die nachfolgende Rekursionsgleichung mit Full History:

$$\begin{aligned} X_0 &= 1, \\ X_n &= 3 + \frac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1} X_k, \quad n \geq 1 \ . \end{aligned}$$

B6.2: Rekursionsgleichungen und ERZ

3 Punkte

Lösen Sie folgende Rekursionsgleichung:

$$\begin{aligned} b_0 &= 1, \\ b_1 &= 1, \\ b_{i+2} &= 3 \cdot b_{i+1} - 2 \cdot b_i + 2^i, \quad i \geq 0, \end{aligned}$$

B6.3: Rekursionsgleichungen und Satz 3.3

3 Punkte

Verwenden Sie Satz 3.3, um folgende homogene lineare Rekursionsgleichungen zu lösen:

a) $a_1 = 1,$
$a_2 = 4,$
$a_i = 2 \cdot a_{i-1} + 3 \cdot a_{i-2}, \quad i \geq 3\ .$

B6.4: Optimaler Suchbaum lineare Liste

3 Punkte

Seien für $n \in \mathbb{N}$ die Schlüsselmenge $A_n = \{1, \ldots, n\}$ und beliebige, aber feste Zugriffswahrscheinlichkeiten $P = (p_1, \ldots, p_n) \in [0,1]^n$ mit $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ gegeben. Wir nennen einen Suchbaum T für A (genau) dann optimal für P, wenn er unter allen Suchbäumen für A die erwarteten Suchkosten $\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \mathrm{niv}_T(i)$ minimiert.

Zeigen Sie: es gibt für unendlich viele Schlüsselfolgen A_n Wahrscheinlichkeitsgewichte P, sodass alle für P optimalen binären Suchbäume linear entartet sind, also Höhe n haben.

Aufbauaufgaben

A6.1: Pfadlängen in erweiterten Binärbäume 3 Punkte

Sei T ein erweiterter binärer Baum mit n inneren Knoten. Beweisen Sie, dass stets $\mathsf{EPL}(T) = \mathsf{IPL}(T) + 2n$ gilt.

A6.2: Random Permutation in BST Analyse 4 Punkte

Erläutern Sie, wo und wie in der Average-Case-Analyse der Suchkosten binärer Suchbäume das Permutationsmodell einfließt. Geben Sie insbesondere eine formale Begründung für die Gleichung

$$\mathbb{E}[\mathsf{CS_n}] = 1 + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[\mathsf{CU}_i]$$

auf Seite 122 im Buch an.

A6.3: Sortierte Teilfolgen und Balanciertheit von Suchbäumen

3 Punkte

Wir haben gesehen, dass das Einfügen einer sortierten Folge in einen binären Suchbaum diesen zu einer Liste entarten lässt. Wir untersuchen, ob dieser Effekt bereits durch das Vorkommen sortierter Teilfolgen in der Einfügefolge erzwungen wird.

Sei $(x_i)_i = x_1, \dots, x_k$ eine Folge, dann ist $x_{i_1}, \dots, x_{i_l}$ eine Teilfolge von $(x_i)_i$ der Länge $l \le k$, falls $i_j < i_{j+1}$ für $1 \le j \le l-1$ und $1 \le i_1$ sowie $i_l \le k$ gilt. Eine Teilfolge ist also die ursprüngliche Folge oder sie entsteht durch Weglassen von Einträgen der ursprünglichen Folge.

Eine Folge $y_1, \dots, y_l$ heißt monoton, falls entweder $y_i \le y_{i+1}$ für alle i mit $1 \le i \le l-1$ gilt, oder $y_i \ge y_{i+1}$ für alle i mit $1 \le i \le l-1$ gilt.

Die Einfügefolge $(x_i)_i = x_1, \dots, x_k$, die den binären Suchbaum T erzeugt, bestehe aus paarweise verschiedenen natürlichen Zahlen. Es sei H die Höhe von T und es sei l die Länge einer längsten monotonen Teilfolge von $(x_i)_i$.

Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

i) Es gilt stets $H \le l$.

ii) Es gilt stets $H \ge l$.

iii) Es gilt stets $H = l$.