TECHNISCHE UNIVERSITÄT
KAISERSLAUTERN

Fachbereich Informatik
AG Algorithmen & Komplexität

Ausgabedatum: 28.11.2014
Version: 2014-11-25 13:13

5. Übungsblatt zur Vorlesung Beweistechniken, WS 14/15

Abgabe: *Bis Freitag, 05.12.2014, 12:00 Uhr, Abgabenkasten im Treppenhaus 48-6.*

Hinweis: Geben Sie jeweils an, welche Beweismethode Sie verwenden.

17. Aufgabe

1 + 1 Punkte

Es seien Funktionen $f_1, \dots, f_m$ und Polynome $p_1, \dots, p_m$ in n gegeben, wobei für $i \in \{1, \dots, m\}$ $f_i \in \mathcal{O}(p_i(n))$ gilt. Ferner sei $\deg(p)$ der *Grad* des Polynoms p.
Zeigen Sie:

a) Sei k so gewählt, dass $\forall i \in \{1, \dots, m\} : \deg(p_i) \leq \deg(p_k)$. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{m} f_i \ = \ \mathcal{O}(p_k(n)) \ .$$

b) $\displaystyle\prod_{i=1}^{m} f_i \ = \ \mathcal{O}\Big(n^{\deg(p_1)+\dots+\deg(p_m)}\Big)$.

18. Aufgabe

4 + 2 Punkte

Für $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+$ definieren wir (als mögliche Alternative zu $\mathcal{O}(f)$)

$$\mathcal{O}'(f) := \Big\{ g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}_0^+ \ \Big| \ \exists c > 0 \, \forall n \in \mathbb{N}_0 : g(n) \leq c \cdot f(n) + c \Big\} \ .$$

Zeigen Sie:

a) Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) > 0$, dann gilt $g \in \mathcal{O}(f) \Leftrightarrow g \in \mathcal{O}'(f)$.

b) Wenn $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 0$, dann gilt $g = \mathcal{O}(f) \Rightarrow g = \mathcal{O}'(f)$,
aber nicht $g = \mathcal{O}(f) \Leftarrow g = \mathcal{O}'(f)$.

19. Aufgabe

1 + 3 Punkte

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

Tipp: Benutzen Sie Strukturelle Induktion.

a) Die Anzahl Knoten (Blätter und innere Knoten) in einem erweiterten Binärbaum ist ungerade.

b) Jedes `Loop`-Programm (ohne Makros und Abkürzungen) besteht aus einer durch 5 teilbaren Anzahl von *Tokens*. Dabei zählen wir Token wie folgt:

- Whitespace (Leerzeichen, Tabs, Zeilenumbrüche etc.) wird ignoriert.
- Strichpunkte werden ignoriert.
- Variablen, Konstanten, Trenn- und Operationssymbole sind je 1 Token.
- In Schlüsselwörtern (`Loop`, `Do` und `End`) zählt jeder Buchstabe als ein Token.

Beispiel:

```
Loop x Do y := z - 0 End;  Loop y Do z := z + 100 End
|||| | || | |  | | | |||   |||| | || | |  | | |   |||
     5          10      15       20         25         30
```

20. Aufgabe

2 Punkte

Wo ist der Fehler in folgendem Induktionsbeweis?

Behauptung $\sum_{i=1}^{n}(2i+1) = \mathcal{O}(n)$

Induktionsanfang $n = 1$

$$\sum_{i=1}^{n}(2i+1) = 3 = \mathcal{O}(1)$$

Induktionsvoraussetzung

Angenommen, die Behauptung gilt für ein festes n.

Induktionsschritt $n \to n+1$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1}(2i+1) &= 2(n+1)+1 \ + \ \sum_{i=1}^{n}(2i+1) && (1)\\
&\underset{\mathrm{IV}}{=} \mathcal{O}(n) + 2n + 3 && (2)\\
&= \mathcal{O}(n) + \mathcal{O}(n) && (3)\\
&= \mathcal{O}(n) && (4)\\
&= \mathcal{O}(n+1). && (5)
\end{aligned}$$

Also gilt die Behauptung nach dem Induktionsprinzip für alle n. $\square$