

4. Übungsblatt zur Vorlesung Beweistechniken, WS 14/15

Abgabe: Bis Freitag, 28.11.2014, 12:00 Uhr, Abgabekasten im Treppenhaus 48-6.

Hinweis: Geben Sie jeweils an, welche Beweismethode Sie verwenden. Auf die explizite Angabe von Anfang, Mitte und Ende können Sie verzichten.

12. Aufgabe

2 + 3 + 1 Punkte

Die *Fibonacci-Zahlen* sind rekursiv definiert:

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad \text{und} \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2.$$

Zeigen Sie:

a) $F_{n+k} = F_k \cdot F_{n+1} + F_{k-1} \cdot F_n$ für alle $n \geq 0, k \geq 1$.

b) $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$ für alle $n \geq 0$.

Hinweis: Ein Beweis per Induktion ist möglich ...

c) $F_{2n} = F_n F_{n+1} + F_{n-1} F_n$ für alle $n \geq 1$.

13. Aufgabe

1 + 1 Punkte

Zeigen Sie:

a) Für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\sum_{i=1}^n i^m = \mathcal{O}(n^{m+1})$.

b) Für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\sum_{i=1}^n i^m \log i = \mathcal{O}(n^{m+1} \log n)$.

14. Aufgabe

2 + 3 Punkte

a) Zeigen Sie:

Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig und seien $p_1, \dots, p_k \in \mathbb{N}$ Primzahlen.Für $m := p_1 \cdot \dots \cdot p_k + 1$ und alle $i \in \{1, \dots, k\}$ gilt $p_i \nmid m$, d. h. p_i teilt m nicht.

b) Zeigen Sie:

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Tipp: Verwenden Sie a).

15. Aufgabe

1 + 2 Punkte

Wir betrachten die Aussage

$$\mathcal{O}(f) = \Theta(f) \cup o(f) \quad (\mathcal{O}ha)$$

a) Wo ist der Fehler in folgendem „Beweis“?

Behauptung: $(\mathcal{O}ha)$ gilt.**Beweis:** durch Nachweis beider Inklusionen:

$$\text{„}\subseteq\text{“} \quad \text{Sei } g \in \mathcal{O}(f) \stackrel{\text{Lemma 1.4}}{\Rightarrow} 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} < \infty.$$

- 1. Fall: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0$
 $\stackrel{\text{Def. } o}{\Rightarrow} g \in o(f).$
- 2. Fall: $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} < \infty$
 $\stackrel{\text{Lemma 1.4}}{\Rightarrow} g \in \Theta(f).$

Da andere Fälle nicht möglich sind, gilt $\mathcal{O}(f) \subseteq \Theta(f) \cup o(f).$

$$\text{„}\supseteq\text{“} \quad \text{Sei nun } g \in \Theta(f) \cup o(f).$$

- 1. Fall: $g \in \Theta(f)$
 $\stackrel{\text{Def. } \Theta}{\Rightarrow} g \in \mathcal{O}(f) \cap \Omega(f) \Rightarrow g \in \mathcal{O}(f).$
- 2. Fall: $g \in o(f)$
 $\stackrel{\text{Def. } o}{\Rightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0 \stackrel{\text{Lemma 1.4}}{\Rightarrow} g \in \mathcal{O}(f).$

Da andere Fälle nicht möglich sind, gilt $\mathcal{O}(f) \supseteq \Theta(f) \cup o(f).$ Beide Richtungen gemeinsam zeigen die Behauptung. □b) Widerlegen Sie die Aussage $(\mathcal{O}ha)$.