TECHNISCHE UNIVERSITÄT
KAISERSLAUTERN

Fachbereich Informatik
AG Algorithmen & Komplexität

Ausgabedatum: 14.11.2014
Version: 2014-11-18 14:59

3. Übungsblatt zur Vorlesung Beweistechniken, WS 14/15

Abgabe: *Bis Freitag, 21.11.2014, 12:00 Uhr, Abgabenkasten im Treppenhaus 48-6.*

Hinweis: Machen Sie eventuelle Schachtelungsebenen in Ihren Beweisen kenntlich und geben Sie stets an, welches Beweisschema Sie (auf dieser Schachtelungsebene) verwenden, so wie es in den Beispielen im Skript zur Vorlesung getan wird.

Auf die explizite Angabe von Anfang, Mitte und Ende dürfen Sie ab diesem Blatt aber verzichten.

8. Aufgabe

$2 + 1$ Punkte

Zeigen Sie:

a) Die Partialbruchzerlegung von $\frac{2x^2+3x-3}{x^3-7x+6}$ ist $\frac{11}{5(x-2)} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{3}{10(x+3)}$.

b) Die Ableitung von $\frac{6x^2 \sin(x)}{x^3}$ ist $\frac{6\cos(x)}{x} - \frac{6\sin(x)}{x^2}$.

9. Aufgabe

$1 + 2$ Punkte

Zeigen Sie:

a) $\big(f = \Theta(g) \ \wedge \ g = \Theta(h)\big) \quad \Rightarrow \quad f = \Theta(h)$.

b) $f = \Theta(g) \quad \Leftrightarrow \quad \Theta(f) = \Theta(g)$.

Machen Sie sich jeweils klar, was das „=“ bedeutet!

10. Aufgabe

1 + 2 Punkte

a) Sei

$$\begin{aligned} b_0 &= 2, \\ b_1 &= 6, \\ b_2 &= 7 \qquad \text{und} \\ b_i &= 3 \cdot b_{i-2} + 2 \cdot b_{i-3} \qquad \text{für } i \geq 3\,. \end{aligned}$$

Zeigen Sie **mittels Induktion**: $b_n = \frac{7}{3}2^n - (-1)^n(n + \frac{1}{3})$.

b) Sei

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= 1 \quad \text{und} \\ a_n &= \sum_{i=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{n-2i} \qquad \text{für } n \geq 2\,. \end{aligned}$$

Zeigen Sie **mittels Induktion** für $n \geq 2$: $a_n = 2^{\lfloor n/2 \rfloor - 1}$

11. Aufgabe

2 Punkte

Wo ist der Fehler in folgendem Induktionsbeweis?

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:
Sei $S = \{b_1, \ldots, b_n\}$ ein Strauß aus n Blumen, wobei jede Blume genau eine Farbe hat.[1]
Dann haben alle Blumen in S die *gleiche* Farbe.

Induktionsanfang:

Jeder Blumenstrauß, der nur eine Blume enthält, ist offensichtlich einfarbig.

Induktionsvoraussetzung:

Alle Blumensträuße mit n Blumen sind einfarbig.

Induktionsschritt:

Sei jetzt $S = \{b_1, \ldots, b_{n+1}\}$ ein Strauß aus $n+1$ Blumen. Entfernen wir aus S eine Blume b_1, so besteht der Reststrauß $R_1 := S \setminus \{b_1\}$ aus n Blumen und ist nach Induktionsvoraussetzung einfarbig. Entfernen wir nun eine andere Blume b_2 aus S, so ist der neue Reststrauß $R_2 := S \setminus \{b_2\}$ nach Induktionsvoraussetzung ebenfalls einfarbig.

Nun sind aber alle Blumen in $S \setminus \{b_1, b_2\}$ in *beiden* Reststräußen enthalten, folglich müssen beide Reststräuße nicht nur einfarbig sein, sondern auch die *gleiche* Farbe haben.

Weil $R_1 \cup R_2 = S$, ist auch ganz S einfarbig. ⬚

[1] Wir zählen hier nur die Farbe der Blüten und abstrahieren von Blumensorten, bei denen schon eine einzelne Blüte mehrere Farben aufweist ...