Ausgabedatum: 07.11.2014
Version: 2014-11-07 14:32

2. Übungsblatt zur Vorlesung Beweistechniken, WS 14/15

Abgabe: *Bis Freitag, 14.11.2014, 12:00 Uhr, Abgabenkasten im Treppenhaus 48-6.*

Hinweis: Machen Sie bei ihren Beweisen jeweils kenntlich, was zu welchem Bestandteil – Anfang, Mitte und Ende – gehört.

4. Aufgabe

3 + 2 + 3 Punkte

a) Beweisen Sie folgende Aussage durch vollständige Fallunterscheidung:

Eine Marktfrau hat eine Balkenwaage und (beliebig viele) Gewichte zu $3\,\mathrm{g}$ und $5\,\mathrm{g}$, die nur in die linke Waagschale gelegt werden dürfen (Gesundheitsamt ...). Behauptung: Die Marktfrau kann jedes ganzzahlige Gewicht $G \geq 8\,\mathrm{g}$ abwiegen.

Hinweis: Betrachten Sie das abzuwiegende Gewicht modulo einer geeignet gewählten Zahl und unterscheiden Sie Fälle, je nachdem welcher Rest bleibt.

b) Wie ändert sich der Beweis für Teil a), wenn das Gewicht zu $5\,\mathrm{g}$ durch ein Gewicht zu $4\,\mathrm{g}$ ersetzt wird?

c) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $5 \mid (n^5 - n)$.

Tipp: Machen Sie eine Fallunterscheidung nach $r := n \bmod 5$.

5. Aufgabe

2 Punkte

Zeigen Sie folgende Äquivalenz:

$$f = \mathcal{O}(g) \quad \Leftrightarrow \quad g = \Omega(f)$$

Verwenden Sie hierfür **nicht** Lemma 1.4 aus dem EAA-Buch, sondern direkt die Definitionen der Landau-Symbole.

Bitte wenden!

6. Aufgabe

2 + 2 + 2 + [2] Punkte

Beweisen Sie folgende Aussagen durch Induktion.

a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

c) Für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq -1}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$.

d) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ können die *Türme von Hanoi* mit n Scheiben in $2^n - 1$ Schritten gelöst werden.

Eine anschauliche Beschreibung der Türme von Hanoi ist auf Wikipedia zu finden: `http://de.wikipedia.org/wiki/T%C3%BCrme_von_Hanoi`

7. Aufgabe

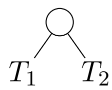
2 Punkte

Die Menge $\mathcal{T}$ der *erweiterten Binärbäume* sei (induktiv) definiert als die kleinste Menge mit folgenden Eigenschaften:

1. Ein einzelnes Blatt „□“ ist ein erw. Binärbaum:

$$\square \in \mathcal{T}$$

2. Für zwei Bäume $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ ist auch der Baum bestehend aus einem inneren Knoten „◯“ und T_1 und T_2 als linkem bzw. rechten Teilbaum ein erw. Binärbaum:



$\in \mathcal{T}$

Sei $T \in \mathcal{T}$ ein solcher erw. Binärbaum. Definiere $b(T)$ als die Anzahl Blätter „□“ in T und analog $k(T)$ die Anzahl innerer Knoten.

Zeigen Sie mit *(struktureller) Induktion*, dass für jeden erweiterten Binärbaum $T \in \mathcal{T}$ gilt: $b(T) = k(T) + 1$.