

1. Übungsblatt für Track ε zur Vorlesung Entwurf und Analyse von Algorithmen, WS 14/15

Abgabe: Bis Freitag, 07.11.2014, 12:00 Uhr, Kasten im Treppenhaus 48-6.

Übungskonzept

Eine erfolgreiche Bearbeitung der Übungsaufgaben ist Zulassungsvoraussetzung für die Abschlussklausur. Es gelten folgende Regeln:

- Die Übungen finden nach Tracks getrennt statt. Dieses und folgende Blätter im Track ε sind für Studenten aus den Studiengängen „Informatik“ und „Mathematik“ vorgesehen.
- Es gibt *Basis-* und *Aufbauaufgaben*. Von ersteren muss jeder Student *einzel*n je eine pro Woche abgeben, letztere werden in *Vierergruppen* abgegeben. Pro Vierergruppe darf jede Basisaufgabe nur einmal abgegeben werden.
- Für die Zulassung sind 18 Punkte aus den Basisaufgaben und 20% aller Aufbau-punkte nötig.
- Weiterhin ist für Informatiker die Teilnahme am Grundlagentest, der die Zwischenklausur ersetzt, Pflicht, für Mathematiker ist die Teilnahme freiwillig.

Details finden Sie auf der Website zur Vorlesung:

<http://www.wagak.cs.uni-kl.de/Vorlesung/ea1415.html>

Basisaufgaben

B1.1: WHILE-Programme

3 Punkte

Für alle Programmieraufgaben gilt, dass (Teil-)Programme, die bereits in der Vorlesung, in *früheren* Übungen oder im Buch¹ (Abschnitt 1.2) erarbeitet wurden, als Makros verwendet werden können. Bitte versehen Sie Ihre Programme mit *für das Verständnis hilfreichen* Kommentaren!

Beachten Sie außerdem, dass Teilprogramme, die als Makros verwendet werden sollen – insbesondere die in dieser Aufgabe gefragten – natürlich die Eingabevariablen *nicht* überschreiben sollten, außer der Seiteneffekt ist gewünscht. Zum Beispiel sollte bei einem Makro für $x := x \text{ div } z$ die Variable z unverändert bleiben, während x sich natürlich ändert².

Benötigen Sie in einem (Teil-)Programm eine neue Variable, können Sie stets annehmen, dass eine solche existiert (und mit 0 initialisiert ist). Machen Sie bitte kenntlich, wenn Sie dies benutzen.

Im Folgenden seien x_i und x_j Variablen und c eine Konstante.

- Geben Sie ein WHILE-(Teil-)Programm an, das die Zuweisung $x_j := c - x_i$ ausführt.
- Geben Sie ein WHILE-(Teil-)Programm an, das `If $x_i = c$ THEN $x_j := 0$ ELSE $x_j := x_j + 1$ END` berechnet.
- Geben Sie ein WHILE-(Teil-)Programm an, das die Potenz $x_i^{x_j}$ berechnet.

B1.2: Wahrscheinlichkeitsrechnung

3 Punkte

Wir betrachten die Menge $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$. In einem ersten Zufallsexperiment bestimmen wir eine Menge $A \subseteq \Omega$, indem wir jedes Element aus Ω unabhängig von den anderen mit Wahrscheinlichkeit p_A in A aufnehmen. Wir wiederholen das Experiment und bilden eine Menge B , wobei wir jedes Element aus Ω (wieder unabhängig von den anderen) mit Wahrscheinlichkeit p_B in B aufnehmen.

- Bestimmen Sie $\mathbb{E}[|A \cap B|]$, den Erwartungswert der Mächtigkeit der Schnittmenge.
- Bestimmen Sie $\mathbb{E}[|A \cup B|]$, den Erwartungswert der Mächtigkeit der Vereinigungsmenge.

¹Unter “dem Buch” verstehen wir im Kontext dieser Vorlesung immer:

Markus Nebel, *Entwurf und Analyse von Algorithmen*, Springer Vieweg Wiesbaden, 2012, ISBN: 978-3-8348-1949-9

²Sie sehen schon, dass Sie im Sinne besserer Lesbarkeit natürlich Ihre Variablen beliebig benennen können – solange klar ist, welche Variable welche Rolle einnimmt (also etwa Eingabe und Ausgabe).

B1.3: WHILE-Programme

3 Punkte

Geben Sie ein WHILE-Programm an, das $\frac{x_i}{x_j}$ mit drei Nachkommastellen (ohne Runden) berechnet, wobei Sie für die Ausgabe das Komma weglassen.

Das Ergebnis von 15 durch 7 wäre also zum Beispiel 2142.

B1.4: Wahrscheinlichkeiten-ERZ

3 Punkte

Eine Zufallsvariable X mit Werten in \mathbb{N} heißt *verschoben geometrisch* verteilt mit Parameter $p \in (0, 1)$, wenn für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\Pr[X = k] = (1 - p)^{k-1} \cdot p$$

gilt. Anschaulich beschreibt X die Anzahl der Wiederholungen, bis bei der wiederholten Ausführung eines Bernoulli-Zufallsexperiments ein Ereignis mit Wahrscheinlichkeit p das erste Mal auftritt.

Bestimmen Sie die geschlossene Form der Wahrscheinlichkeiten-Erzeugendenfunktion von X und nutzen Sie diese, um den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ in Abhängigkeit von p zu berechnen.

Aufbauaufgaben**A1.1: Varianzen mit Wahrscheinlichkeiten-ERZ**

5 + 4 Punkte

- a) Sei X eine Zufallsvariable mit $p_n := \Pr[X = n]$, wobei $\sum_{k \in \mathbb{N}_0} p_k = 1$ gelte. Zeigen Sie, dass für $P(z)$ die zugehörige Wahrscheinlichkeiten-Erzeugendenfunktion die Varianz von X über

$$\mathbb{V}[X] = P''(1) + P'(1) - (P'(1))^2$$

berechnet werden kann. Hierbei bezeichnen $P'(z)$ bzw. $P''(z)$ die erste bzw. zweite Ableitung von P nach z .

- b) Sei X eine Zufallsvariable mit Werten in \mathbb{N}_0 und Wahrscheinlichkeitsgewichten

$$\Pr[X = k] = (m + 1)^{-n} \binom{n}{k} m^{n-k}$$

für ganzzahlige Konstanten $n, m \geq 1$. Berechnen Sie – Sie ahnen es: mit Wahrscheinlichkeiten-Erzeugendenfunktionen – Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ und Varianz $\mathbb{V}[X]$ von X .

Hinweis: Für die Bearbeitung dieser Aufgaben mag das *Theoretical Computer Science Cheat Sheet*³ hilfreich sein.

A1.2: WHILE-Programme

3 + 2 Punkte

Gegeben sei folgende Java-Methode:

```
1  int countDivisors(int n) {
2      if ( n <= 1 ) {
3          return 1;
4      }

6      int s = 1;
7      while ( s*s <= n ) {
8          ++s;
9      }
10     --s;

12     int nDivisors = 2;
13     int i;
14     for ( i = 2; i <= s; ++i ) {
15         nDivisors += n % i == 0 ? 2 : 0;
16     }
17     --i;

19     if ( i*i == n ) {
20         --nDivisors;
21     }

23     return nDivisors;
24 }
```

Hinweis: *condition ? value : value* ist der sogenannte conditional operator oder Elvis ?: operator, siehe z. B. http://en.wikipedia.org/wiki/Conditional_operator.⁴

- Übersetzen Sie die Java-Methode in ein äquivalentes Loop/While-Programm. Nur die im Buch (Abschnitt 1.2) erwähnten und in Aufgabe B1.1 implementierten Abkürzungen dürfen verwendet werden. Kommentieren Sie Ihr Programm sinnvoll!
- Kann die obige Java-Methode in ein reines Loop-Programm übersetzt werden? Begründen Sie (informell) warum bzw. warum nicht.

³<http://www.tug.org/texshowcase/cheat.pdf>

⁴Man beachte, dass Wikipedia hier nicht als wissenschaftliche Quelle verwendet ist, sondern nur eine allgemeine Einführung bietet. ;)