

1. Übungsblatt zur Vorlesung Beweistechniken, WS 14/16

Abgabe: Bis Freitag, 07.11.2014, 12:00 Uhr, Abgabekasten im Treppenhaus 48-6.

Übungskonzept

Die Bearbeitung der Übungen *Beweistechniken* ist Zulassungsvoraussetzung zur Abschlussklausur des Moduls *Entwurf und Analyse von Algorithmen für Angewandte Informatiker*.

Es gelten folgende Regeln:

- Es müssen auf **jedem einzelnen Blatt** 50 % der Punkte erreicht werden, die es auf Pflichtaufgaben gibt.
- Punkte gibt es für sinnvoll bearbeitete Aufgaben. Insbesondere müssen *nicht* zwingend 50 % der Aufgaben korrekt gelöst werden, um die Zulassung zu erreichen.

Die Pflichtpunkte sind bei jeder Aufgabe angegeben – evtl. separat für die jeweiligen Teilaufgaben.

- Über freiwillige Aufgaben können Zusatzpunkte gesammelt werden. Freiwillige (Teil-) Aufgaben sind daran zu erkennen, dass ihre Punktzahl [eingeklammert] ist.

Hinweis: Machen Sie bei ihren Beweisen jeweils kenntlich, was zu welchem Bestandteil gehört. Gemeint sind die drei Bestandteile, die in der Vorlesung eingeführt wurden:

- *Anfang:* Hier sollen Sie bekannte Voraussetzungen, benutzte Definitionen und Resultate sammeln.
- *Mitte:* Dieser Bestandteil enthält die eigentliche Argumentationskette, aus der die Behauptung folgt. Dazu gehört auch die explizite Angabe des Beweis-Schemas, z. B. „direkter Beweis“ oder „Beweis durch Widerspruch“.
- *Ende:* Hier machen Sie nochmals explizit, was soeben gezeigt wurde und beenden den Beweis mit „□“.

1. Aufgabe

1 + 2 + 1 + [2] Punkte

Zeigen Sie **direkt**:

- Die Summe von 3 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist durch 3 teilbar.
- Für ungerade k ist die Summe von k aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen durch k teilbar.
- Es gibt unlösbare Übungsaufgaben.¹
- [Notwendige Bedingung 1. Ordnung für lokale Extrema]

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Es gilt:Wenn $x_0 \in \mathbb{R}$ ein lokales Maximum von f ist, dann ist $f'(x_0) = 0$.

2. Aufgabe

1 + 1 + 1 + [2] Punkte

Zeigen Sie durch **Kontraposition**:

- Sei $x \in \mathbb{R}$. Aus $\frac{x}{x^2+1} > 2$ folgt $x > 0$.
- Für eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0 .$$

- [Lineare Unabhängigkeit ist stabil bzgl. \subseteq]

Wenn die Vektoren $\{v_1, \dots, v_n\}$ linear unabhängig sind, dann sind auch die Vektoren $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ linear unabhängig.

- [Reduktion]

Sei $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine **While**-berechenbare Funktion. Dann gilt:Wenn $f \circ g$ *nicht* **While**-berechenbar ist, dann ist auch f selbst *nicht* **While**-berechenbar.

Bitte wenden!

¹Wir werden uns bemühen, in dieser Vorlesung keine solchen zu stellen ...

3. Aufgabe

1 + 1 + 2 + [3] Punkte

Zeigen Sie jeweils mit einem **Widerspruchsbeweis**:

- a) Sei U eine *unendliche* Menge, $E \subset U$ eine *endliche* Teilmenge von U .

Das Komplement $\bar{E} := U \setminus E$ von E bezüglich U ist unendlich.

- b) Es gibt unlösbare Übungsaufgaben.²

- c) [Induktion ab k]

Sei A_n eine beliebige Aussage, die von $n \in \mathbb{N}_0$ abhängt und $k \in \mathbb{N}_0$ eine Konstante.

Zeigen Sie: Wenn A_k gilt und $\forall n \geq k : A_n \Rightarrow A_{n+1}$, dann gilt $\forall n \geq k : A_n$.

Tipp: Orientieren Sie sich an der Argumentation aus dem Beweistechniken-Skript.

- d) [Überabzählbarkeit von \mathbb{R}]

Sei $\mathbb{B}^\omega := \{b_1b_2b_3 \cdots \mid \forall i \in \mathbb{N} : b_i \in \{0, 1\}\}$ die Menge aller *unendlichen* Binärstrings.

Zeigen Sie, dass \mathbb{B}^ω nicht *abzählbar* ist.

Dabei ist eine Menge M genau dann abzählbar, wenn es eine *injektive* Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{N}$ gibt.

Tipp: Anschaulich ist eine Menge M abzählbar, wenn man alle ihre Elemente in einer Liste untereinander schreiben kann. Denn dann können wir f wählen, indem wir für jedes Element $m \in M$ einfach $f(m)$ auf die Zeilennummer in der Liste setzen.

Zeigen Sie, dass eine solche Liste der Elemente von \mathbb{B}^ω unvollständig ist, indem Sie ein Element konstruieren, das in der Liste fehlt.

²Ja, das ist die gleiche Behauptung wie 1. Aufgabe c).

Nein, es ist trotzdem nicht die selbe Aufgabe, denn hier ist ein Widerspruchsbeweis, dort ein direkter gefordert.