Rechenregeln für Grenzwerte von Quotienten

Raphael Reitzig Sebastian Wild

Februar 2014

Wir verwenden viel und gerne Lemma 1.4, um das Wachstum von Funktionen zu vergleichen. Dabei gilt es, Grenzwerte der Form

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{h(n)}$$

zu bestimmen. Dabei behelfen wir uns mit einigen Tricks, zum Beispiel die Funktionen stetig fortzusetzen und die Regel von L'Hôpital anzuwenden. Einige weitere Methoden, die oft „hand-waving" eingesetzt werden, wollen wir hier in präziser Form vorstellen und beweisen.

Auspacken von Funktionen

Wenn sich die Parameter von Funktionen asymptotisch stark unterschiedlich verhalten, gilt das dann auch für die Funktionswerte? Nicht immer, aber eine reichhaltige Klasse von Funktionen, für die das so ist, können wir identifizieren:

Lemma Auspacken

Sei f eine konvexe, stetig differenzierbare und streng monoton wachsende Funktion. Seien ferner g und h Funktionen mit $h \in \Omega(1)$ und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{h(n)} = \infty\ .$$

Dann ist auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(g(n))}{f(h(n))} = \infty\ .$$

Es sei bemerkt, dass man Quotienten mit Grenzwerte 0 auch untersuchen kann, indem man den Kehrwert betrachtet.

Beispiel

Wir betrachten die Funktionen $g(n) = 2^{n \ln n}$ und $h(n) = 3^n$. Wir setzen an mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n \ln n}}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(e^{\ln 2}\right)^{n \ln n}}{\left(e^{\ln 3}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\exp(\ln(2) \cdot n \ln n)}{\exp(\ln(3) \cdot n)} \ .$$

Nun ist exp sicher konvex, (auf ganz $\mathbb{R}$) stetig differenzierbar sowie streng monoton wachsend; auch ist $(\ln 3)n \in \Omega(1)$. Weiterhin gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln 2) \cdot n \ln n}{(\ln 3) \cdot n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 2}{\ln 3} \cdot \ln n = \infty \ .$$

Damit findet Lemma Auspacken Anwendung und wir erhalten

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n \ln n}}{3^n} = \infty \ ,$$

was mit Lemma 1.4 impliziert, dass $2^{n \ln n} \in \omega(3^n)$.

Beweis von Lemma Auspacken

Wir beweisen zunächst einige Hilfslemmata. Hierbei sei vorweggenommen, dass die wesentliche inhaltliche Annahme ist, dass $f \in \Omega(n)$ und „nett“ ist. Welche Funktionen genau „nett“ sind, ist (für uns) offen; die Bedingungen in Lemma Auspacken sind hinreichend und aus technischen Überlegungen[1] entstanden. Die folgenden Lemmata drücken im Wesentlichen aus, dass f „schnell genug“ wächst und keinen „Unfug“ macht.

Vorab ein kleiner Fakt, der uns sagt, welche Charakterisierung von Konvexität wir hier verwenden wollen.

Fakt Konvexität

Wenn f stetig differenzierbar ist, dann ist

$$f \text{ konvex} \iff \forall x_0, x : f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \ .$$

Die Funktion liegt also, anschaulich gesprochen, oberhalb aller Tangenten.

Ist f sogar zweimal stetig differenzierbar, dann ist

$$f \text{ konvex} \iff \forall x : f''(x) \geq 0 \ .$$

[1] Lies: Beweistechnik Trial & Error, dies kam raus. Können Sie ein ähnliches Lemma für schwächere Bedingungen an f beweisen? Lassen Sie es uns wissen!

Als Erstes werden wir brauchen, dass die Ableitung einer Funktion nicht *viel* langsamer wachsen kann als die Funktion selbst.

Lemma 1

Für f stetig differenzierbar mit f' monoton wachsend gilt

$$xf'(x) \in \Omega(f(x)) \ .$$

Beweis Bekanntermaßen ist

$$\int_0^x f'(z)dz = f(x)$$

und wegen der Monotonie ist $f'(y) \leq f'(x)$ für $0 \leq y \leq x$, also

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x f'(z)dz \\ &\leq \int_0^x f'(x)dz \\ &= xf'(x) \end{aligned}$$

□

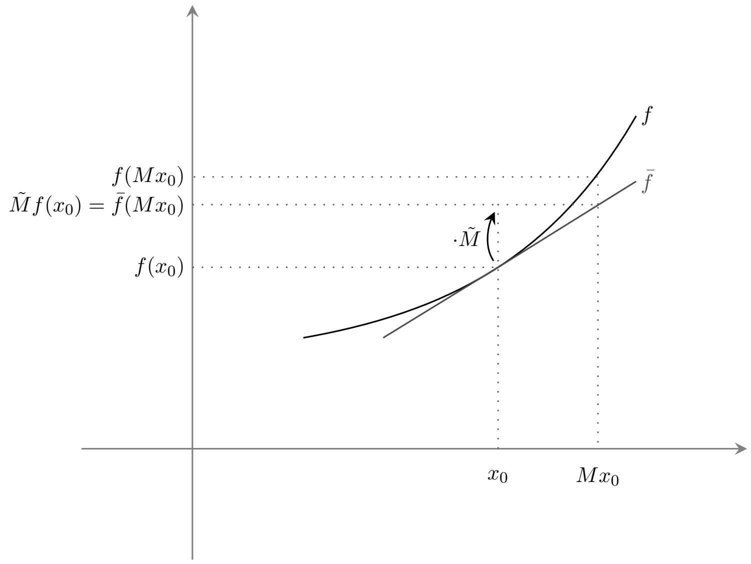
Weiterhin benötigen wir, dass konstante Faktoren „in“ f mehr Auswirkung haben als „außerhalb“.

Lemma 2

Sei f wie in Lemma Auspacken. Dann gilt für alle $\tilde{M} \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$, dass

$$\exists M \ \forall x \geq \varepsilon \ : f(Mx) \geq \tilde{M} f(x) \ .$$

Beweis Sei $\tilde{M}$ gegeben. An jeder Stelle x_0 können wir „ein" M über die Tangente (lineare Approximation) $\bar{f}_{x_0}$ an f in x_0 bestimmen:



So ergibt sich mit $\bar{f}_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ die gesuchte Konstante als Lösung der Gleichung

$$\tilde{M}f(x_0) = \bar{f}_{x_0}(M_{x_0} \cdot x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(M_{x_0} - 1)x_0$$

zu

$$M_{x_0} = 1 + \frac{(\tilde{M} - 1)f(x_0)}{x_0 f'(x_0)} .$$

Nun liefert natürlich jedes x_0 eine andere solche Konstante, allerdings haben wir mit Fakt Konvexität und Lemma 1, dass $\frac{f(n)}{nf'(n)} \in \mathcal{O}(1)$ und damit die Menge der M_{x_0} auf $[n_0, \infty)$ mit dem n_0 aus der Definition von $\mathcal{O}(1)$ beschränkt ist. Weiterhin ist die Funktion $x \mapsto M_x$ auf $\mathbb{R}^+$ stetig und damit auf dem kompakten Intervall $[\varepsilon, n_0]$ beschränkt. Somit existiert

$$M := 1 + \sup_{x \in \mathbb{R}_{\geq \varepsilon}} \frac{(\tilde{M} - 1)f(x)}{xf'(x)} , \tag{1}$$

von dem wir zeigen, dass es die Behauptung erfüllt. Mit Fakt Konvexität gilt dann für $x \geq \varepsilon$

$$\begin{aligned} f(Mx) &= f\big(x + (M-1)x\big) \\ &\geq \bar{f}_x\big(x + (M-1)x\big) \\ &= f(x) + f'(x)(M-1)x \\ &\overset{(1)}{\geq} f(x) + f'(x)\left(\frac{(\tilde{M}-1)f(x)}{xf'(x)}\right)x \\ &= \tilde{M}f(x) , \end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

Nun können wir zum Beweis des eigentlichen Lemmas schreiten, das wir noch einmal wiederholen:

Lemma Auspacken

Sei f eine konvexe, stetig differenzierbare und streng monoton wachsende Funktion. Seien ferner g und h Funktionen mit $h \in \Omega(1)$ und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{h(n)} = \infty \; . \tag{2}$$

Dann ist auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(g(n))}{f(h(n))} = \infty \; . \tag{3}$$

Beweis Nach Definition von (2) gilt

$$\forall M \; \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 : \frac{g(n)}{h(n)} > M \; .$$

Für hinreichend große n ist für jedes M also $g(n) > Mh(n)$, was zusammen mit Monotonie von f

$$\forall n \geq n_0 : f(g(n)) \; > \; f\big(M(h(n)\big) \; . \tag{4}$$

impliziert.

Wir haben zu zeigen, dass

$$\forall \tilde{M} \; \exists \tilde{n}_0 \; \forall n \geq \tilde{n}_0 : \frac{f(g(n))}{f(h(n))} > \tilde{M} \; .$$

Sei also $\tilde{M}$ gegeben. Aus $h \in \Omega(1)$ erhalten wir Konstanten n_0' und c, sodass

$$\forall n \geq n_0' : h(n) \geq c \; . \tag{5}$$

Dann finden wir nach Lemma 2 ein M, sodass

$$\forall x \geq c : f(Mx) \geq \tilde{M} f(x) \; . \tag{6}$$

Damit gilt für $n \geq \tilde{n}_0 := \max(n_0, n_0')$:

$$\begin{aligned} \frac{f(g(n))}{f(h(n))} &\overset{(4)}{>} \frac{f\big(Mh(n)\big)}{f(h(n))} \\ &\overset{(5),(6)}{\geq} \frac{\tilde{M} f(h(n))}{f(h(n))} \\ &= \tilde{M} \; , \end{aligned}$$

also ist die Aussage mit $\tilde{n}_0$ gezeigt. □

Abschließend möchten wir noch ein Korollar formulieren, das manchmal Umwege vermeiden kann:

Korollar Auspacken

Sei f eine konvexe, stetig differenzierbare und streng monoton wachsende Funktion. Seien ferner g und h Funktionen. Dann gelten

$$\begin{aligned} g \in \omega(h) \land h \in \Omega(1) &\implies f \circ g \in \omega(f \circ h) \quad \text{und} \\ g \in o(h) \land g \in \Omega(1) &\implies f \circ g \in o(f \circ h) \ . \end{aligned}$$

Beweis Seien f, g, h wie im Korollar und außerdem $g \in \omega(h)$. Nach Definition von ω gilt also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{h(n)} = \infty$$

und mit Lemma Auspacken, dessen Voraussetzungen erfüllt sind,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(g(n))}{f(h(n))} = \infty \ ,$$

was wiederum nach Definition vom ω gleichbedeutend zu

$$f \circ g \in \omega(f \circ h)$$

ist, was zu zeigen war.

Der Beweis der zweiten Implikation verläuft analog, wenn man zusätzlich

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{h(n)} = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \frac{h(n)}{g(n)} = \infty$$

nutzt. □

Beispiel

Seien $g : n \mapsto n^{\ln n}$ und $h : n \mapsto n^n$. Wir schreiben sie als $g : n \mapsto e^{(\ln n)^2}$ und $h : n \mapsto e^{n \ln n}$. Mit $f = \exp$ und $(\ln n)^2 \in \Omega(1)$ können wir das Korollar anwenden und erhalten

$$(\ln n)^2 \in o(n \ln n) \implies n^{\ln n} \in o(n^n) \ .$$

Dass die linke Seite gilt, ist mit Lemma 1.4 oder Lemma A schnell einzusehen.

Einsetzen von Asymptotiken

Beim Berechnen von Grenzwerten kann es hilfreich sein, Terme durch asymptotisch äquivalente, einfachere Terme zu ersetzen. Dass man dies darf, zeigen wir nun.

Lemma Einsetzen

Seien $f, g, h : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f \sim g$ und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{h(n)} = c \tag{7}$$

für $c \in \mathbb{R}$. Dann ist auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{h(n)} = c\ .$$

Beweis Nach Definition von $f \sim g$ haben wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1\ . \tag{8}$$

Damit bekommen wir

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{h(n)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{g(n)\cdot f(n)}{f(n)\cdot h(n)} \\
&\overset{(8),(7)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{h(n)} \\
&= 1 \cdot c \\
&= c\ .
\end{aligned}$$

□

Man beachte, dass man das Lemma für Quotienten, die divergieren, auch benutzen kann, indem man den Kehrwert betrachtet; dieser muss dann ja gegen $c = 0$ konvergieren. Gleiches gilt, wenn man den Nenner durch eine Asymptotik ersetzen möchte; alternativ zeigt man ein analoges Lemma.

Beispiel

Um zu zeigen, dass $n^{\sqrt{n}} \in o(n!)$, wollen wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\sqrt{n}}}{n!}$$

berechnen. Da $n!$ als inhärent diskrete Funktion unseren üblichen Techniken widersteht, nutzen wir die aus Stirlings Identität abgeleitete Asymptotik

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

und berechnen stattdessen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\sqrt{n}}}{\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n} = \cdots = 0 \ ,$$

was mit Lemma Einsetzen und Lemma 1.4 die Behauptung zeigt. $\square$

Da wir nicht immer eine Asymptotik für den ganzen Zähler zur Hand haben, kann das folgende Hilfslemma hilfreich sein.

Hilfslemma Einsetzen

Seien $f, g, h : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^+$ Funktionen mit $f \sim g$. Dann gelten

i) $h + f \sim h + g$ und

ii) $h \cdot f \sim h \cdot g$.

Beweis

ad i) Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ beliebig. Aus $f \sim g$ und $h \sim h$ erhalten wir mit den jeweiligen Definitionen von $\sim$ und des Limes, dass

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0.\ 1 - \varepsilon \leq \frac{f(n)}{g(n)}, \frac{h(n)}{h(n)} \leq 1 + \varepsilon \ .$$

Durch Umstellen und Kombinieren der Schranken bekommen wir für $n \geq n_0$, dass auch

$$h(n) + f(n) \leq (1+\varepsilon)(h(n) + g(n)) \text{ und}$$
$$h(n) + f(n) \geq (1-\varepsilon)(h(n) + g(n))$$

und damit

$$1 - \varepsilon \leq \frac{h(n) + f(n)}{h(n) + g(n)} \leq 1 + \varepsilon \ ,$$

was wiederum nach Definition der Behauptung entspricht.

Man beachte, dass die Umformungen ausnutzen, dass alle Funktionswerte positiv sind. $\square_{\text{i)}}$

ad ii) Ähnlich wie beim Beweis von Lemma Einsetzen kann man den Grenzwert, der nach Definition von $\sim$ äquivalent zur Behauptung ist, aufspalten, da die Grenzwerte beider Faktoren endlich sind:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h(n) \cdot f(n)}{h(n) \cdot g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{h(n)}{h(n)} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1 \cdot 1 = 1 \; .$$

$\square_{\text{ii)}}$

$\square$

Achtung! Ersetzen von Termen durch asymptotisch äquivalente ist nicht *immer* erlaubt. So ist zwar $n^2 + 2n \sim n^2$, aber

$$e^{n^2+2n} \not\sim e^{n^2} \; .$$

Anschaulich gesagt wird hier der Unterschied zwischen den asymptotisch äquivalenten Termen so verstärkt, dass die Gesamtausdrücke nicht mehr äquivalent sind. Es ist also je nach „umschließender“ Funktion zu prüfen, ob eine solche Ersetzung erlaubt ist.