Ausgabedatum: 26.11.2013
Version: 2013-11-26 19:01

6. Übungsblatt zur Vorlesung Beweistechniken, WS 12/13

Abgabe: *Bis Dienstag, 03.12.2013, 12:00 Uhr, Abgabenkasten im Treppenhaus 48-6.*

16. Aufgabe

3 + 2 Punkte

In dieser Aufgabe werden Sie schrittweise zeigen, dass es Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ geben muss, die nicht `While`-berechenbar sind.

a) *[Gödelisierung für While-Programme]*

Zeigen Sie:
Die Menge $\mathcal{W}$ der `While`-Programme – wie im Buch in Abschnitt 1.2 definiert – ist *abzählbar*, d. h. es gibt eine injektive Funktion $g : \mathcal{W} \to \mathbb{N}$.

Tipp: Das Problem lässt sich in drei Teilaufgaben zerlegen:

(i) Definieren Sie eine eindeutige Kodierung für `While`-Programme als Zeichenkette, also eine Funktion $string : \mathcal{W} \to \Sigma^\star$, wobei

$$\Sigma = \{\mathtt{a}, \ldots, \mathtt{z}, \mathtt{0}, \mathtt{1}, \ldots, \mathtt{9}, \mathtt{:}, \mathtt{!}, \mathtt{=}, \mathtt{+}, \mathtt{-}, \mathtt{;}, \sqcup\}$$

das *endliche* Alphabet der erlaubten Zeichen darstellt und $\Sigma^\star$ die Menge aller *endlichen* Zeichenketten über Σ.

Beispiel: `"x17 := x1; while x17 != 0 do x17 := x7 - 42 end"`

Ihre Definition von *string* sollte entlang des induktiven Aufbaus der `While`-Programme gemäß deren Definition verlaufen.

(ii) Zeigen Sie, dass $\Sigma^\star$ abzählbar ist für jedes endliche Σ.

(iii) A abzählbar $\wedge$ $B \subseteq A \Rightarrow B$ abzählbar.

b) *[Überabzählbarkeit von* $\mathsf{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$*]*

Zeigen Sie:
Die Menge aller Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist *überabzählbar* (d. h. nicht abzählbar).

Tipp: Verwenden Sie *Diagonalisierung*.[1]

Tipp: Jede Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ korrespondiert zu einer *Folge* $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ vermöge $a_i := f(i)$ und umgekehrt.

Damit gibt es "weit mehr" Funktionen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ als es `While`-Programme gibt, sodass für manche Funktionen schlicht kein `While`-Programm mehr übrig sein kann. Diese Funktionen sind folglich nicht `While`-berechenbar.

[1] `http://de.wikipedia.org/wiki/Cantors_zweites_Diagonalargument`