

5. Übungsblatt zur Vorlesung Beweistechniken, WS 12/13

Abgabe: Bis Dienstag, 26.11.2013, 12:00 Uhr, Abgabekasten im Treppenhaus 48-6.

Hinweis: Geben Sie jeweils an, welche Beweismethode Sie verwenden.

17. Aufgabe

4 + 2 Punkte

Für $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ definieren wir (als mögliche Alternative zu $\mathcal{O}(f)$)

$$\mathcal{O}'(f) := \left\{ g : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \mid \exists c > 0 \forall n \in \mathbb{N}_0 : g(n) \leq c \cdot f(n) + c \right\}.$$

Zeigen Sie:

- Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) > 0$, dann gilt $g \in \mathcal{O}(f) \Leftrightarrow g \in \mathcal{O}'(f)$.
- Wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 0$, dann gilt $g = \mathcal{O}(f) \Rightarrow g = \mathcal{O}'(f)$,
aber nicht $g = \mathcal{O}(f) \Leftarrow g = \mathcal{O}'(f)$.

18. Aufgabe

1 + 3 Punkte

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

Tipp: Benutzen Sie Strukturelle Induktion.

- Die Anzahl Knoten (Blätter und innere Knoten) in einem erweiterten Binärbaum ist ungerade.
- Jedes Loop-Programm (ohne Makros und Abkürzungen) besteht aus einer durch 5 teilbaren Anzahl von *Tokens*. Dabei zählen wir Token wie folgt:
 - Whitespace (Leerzeichen, Tabs, Zeilenumbrüche etc.) wird ignoriert.
 - Strichpunkte werden ignoriert.
 - Variablen, Konstanten, Trenn- und Operationssymbole sind je 1 Token.
 - In Schlüsselwörtern (Loop, Do und End) zählt jeder Buchstabe als ein Token.

Beispiel:

```

Loop x Do y := z - 0 End;   Loop y Do z := z + 100 End
||||| | || | | |         ||||| | || | | |         |||
      5           10           15           20           25           30

```

19. Aufgabe

2 Punkte

Wo ist der Fehler in folgendem Induktionsbeweis?

Behauptung $\sum_{i=1}^n (2i + 1) = \mathcal{O}(n)$

Induktionsanfang $n = 1$

$$\sum_{i=1}^n (2i + 1) = 3 = \mathcal{O}(1)$$

Induktionsvoraussetzung

Angenommen, die Behauptung gilt für ein festes n .

Induktionsschritt $n \rightarrow n + 1$

$$\sum_{i=1}^{n+1} (2i + 1) = 2(n + 1) + 1 + \sum_{i=1}^n (2i + 1) \quad (1)$$

$$\stackrel{\text{IV}}{=} \mathcal{O}(n) + 2n + 3 \quad (2)$$

$$= \mathcal{O}(n) + \mathcal{O}(n) \quad (3)$$

$$= \mathcal{O}(n) \quad (4)$$

$$= \mathcal{O}(n + 1). \quad (5)$$

Also gilt die Behauptung nach dem Induktionsprinzip für alle n .

□