Ausgabedatum: 12.11.2013
Version: 2013-11-11 10:02

4. Übungsblatt zur Vorlesung Beweistechniken, WS 12/13

Abgabe: *Bis Dienstag, 19.11.2013, 12:00 Uhr, Abgabenkasten im Treppenhaus 48-6.*

Hinweis: Geben Sie jeweils an, welche Beweismethode Sie verwenden. Auf die explizite Angabe von Anfang, Mitte und Ende können Sie verzichten.

12. Aufgabe

2 + 3 + 1 Punkte

Die *Fibonacci-Zahlen* sind rekursiv definiert:

$$F_0 = 0, \qquad F_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{für } n \geq 2\ .$$

Zeigen Sie:

a) $F_{n+k} = F_k \cdot F_{n+1} + F_{k-1} \cdot F_n \qquad$ für alle $n \geq 0, k \geq 1$.

b) $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \qquad$ für alle $n \geq 0$.

Hinweis: Ein Beweis per Induktion ist möglich ...

c) $F_{2n} = F_n F_{n+1} + F_{n-1} F_n \qquad$ für alle $n \geq 1$.

13. Aufgabe

1 + 1 Punkte

Zeigen Sie:

a) Für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\sum_{i=1}^{n} i^m = \mathcal{O}(n^{m+1})$.

b) Für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\sum_{i=1}^{n} i^m \log i = \mathcal{O}(n^{m+1} \log n)$.

14. Aufgabe

2 + 3 Punkte

a) Zeigen Sie:

Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig und seien $p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{N}$ Primzahlen.
Für $m := p_1 \cdot \cdots \cdot p_k + 1$ und alle $i \in \{1, \ldots, k\}$ gilt $p_i \nmid m$, d. h. p_i teilt m nicht.

b) Zeigen Sie:

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Tipp: Verwenden Sie a).

15. Aufgabe

1 + 2 Punkte

Wir betrachten die Aussage

$$\mathcal{O}(f) = \Theta(f) \cup o(f) \tag{$\mathcal{O}$ha}$$

a) Wo ist der Fehler in folgendem „Beweis“?

Behauptung: ($\mathcal{O}$ha) gilt.

Beweis: durch Nachweis beider Inklusionen:

„⊆“ Sei $g \in \mathcal{O}(f) \underset{\text{Lemma 1.4}}{\Rightarrow} 0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} < \infty$.

- 1. Fall: $\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0$
  $\underset{\text{Def. } o}{\Rightarrow} g \in o(f)$.
- 2. Fall: $0 < \lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} < \infty$
  $\underset{\text{Lemma 1.4}}{\Rightarrow} g \in \Theta(f)$.

Da andere Fälle nicht möglich sind, gilt $\mathcal{O}(f) \subseteq \Theta(f) \cup o(f)$.

„⊇“ Sei nun $g \in \Theta(f) \cup o(f)$.

- 1. Fall: $g \in \Theta(f)$
  $\underset{\text{Def. } \Theta}{\Rightarrow} g \in \mathcal{O}(f) \cap \Omega(f) \Rightarrow g \in \mathcal{O}(f)$.
- 2. Fall: $g \in o(f)$
  $\underset{\text{Def. } o}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 0 \underset{\text{Lemma 1.4}}{\Rightarrow} g \in \mathcal{O}(f)$.

Da andere Fälle nicht möglich sind, gilt $\mathcal{O}(f) \supseteq \Theta(f) \cup o(f)$.

Beide Richtungen gemeinsam zeigen die Behauptung. □

b) Widerlegen Sie die Aussage ($\mathcal{O}$ha).