Das Auspacklemma

Eine Rechenregel für Beweise mit Lemma 1.4

Raphael Reitzig, Sebastian Wild

November 2013

Wir verwenden viel und gerne Lemma 1.4, um das Wachstum von Funktionen zu vergleichen. Dabei gilt es, Grenzwerte der Form

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{h(n)}$$

zu bestimmen. Dabei behelfen wir uns mit einigen Tricks, zum Beispiel die Funktionen stetig fortzusetzen und die Regel von L'Hôpital anzuwenden. Eine weitere Methode, die oft „hand-waving" eingesetzt wird, wollen wir hier vorstellen.

Lemma Auspacken

Sei f eine konvexe, stetig differenzierbare und streng monoton wachsende Funktion. Seien ferner g und h Funktionen mit $h \in \Omega(1)$ und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{h(n)} = \infty \; .$$

Dann ist auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(g(n))}{f(h(n))} = \infty \; .$$

Es sei bemerkt, dass man Quotienten mit Grenzwerte 0 auch untersuchen kann, indem man den Kehrwert betrachtet.

Beispiel

Wir betrachten die Funktionen $g(n) = 2^{n \ln n}$ und $h(n) = 3^n$. Wir setzen an mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n \ln n}}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(e^{\ln 2}\right)^{n \ln n}}{\left(e^{\ln 3}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\exp(\ln(2) \cdot n \ln n)}{\exp(\ln(3) \cdot n)} \ .$$

Nun ist exp sicher konvex, (auf ganz $\mathbb{R}$) stetig differenzierbar sowie streng monoton wachsend; auch ist $(\ln 3)n \in \Omega(1)$. Weiterhin gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln 2) \cdot n \ln n}{(\ln 3) \cdot n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 2}{\ln 3} \cdot \ln n = \infty \ .$$

Damit findet Lemma Auspacken Anwendung und wir erhalten

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n \ln n}}{3^n} = \infty \ ,$$

was mit Lemma 1.4 impliziert, dass $2^{n \ln n} \in \omega(3^n)$.

Beweis von Lemma Auspacken

Wir beweisen zunächst einige Hilfslemmata. Hierbei sei vorweggenommen, dass die wesentliche inhaltliche Annahme ist, dass $f \in \Omega(n)$ und „nett“ ist. Welche Funktionen genau „nett“ sind, ist (für uns) offen; die Bedingungen in Lemma Auspacken sind hinreichend und aus technischen Überlegungen[1] entstanden. Die folgenden Lemmata drücken im Wesentlichen aus, dass f „schnell genug“ wächst und keinen „Unfug“ macht.

Vorab ein kleiner Fakt, der uns sagt, welche Charakterisierung von Konvexität wir hier verwenden wollen.

Fakt Konvexität

Wenn f stetig differenzierbar ist, dann ist

$$f \text{ konvex} \iff \forall x_0, h : f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_0 + h) \ .$$

Die Funktion liegt also, anschaulich gesprochen, oberhalb aller Tangenten.

Ist f sogar zweimal stetig differenzierbar, dann ist

$$f \text{ konvex} \iff \forall x : f''(x) \geq 0 \ .$$

[1] Lies: Beweistechnik Trial & Error, dies kam raus. Können Sie ein ähnliches Lemma für schwächere Bedingungen an f beweisen? Lassen Sie es uns wissen!

Als Erstes werden wir brauchen, dass die Ableitung einer Funktion nicht *viel* langsamer wachsen kann als die Funktion selbst.

Lemma 1

Für f stetig differenzierbar mit f' monoton wachsend gilt

$$xf'(x) \in \Omega(f(x)) \ .$$

Beweis Bekanntermaßen ist

$$\int_0^x f'(z)dz = f(x)$$

und wegen der Monotonie ist $f'(y) \leq f'(x)$ für $0 \leq y \leq x$, also

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x f'(z)dz \\ &\leq \int_0^x f'(x)dz \\ &= xf'(x) \end{aligned}$$

□

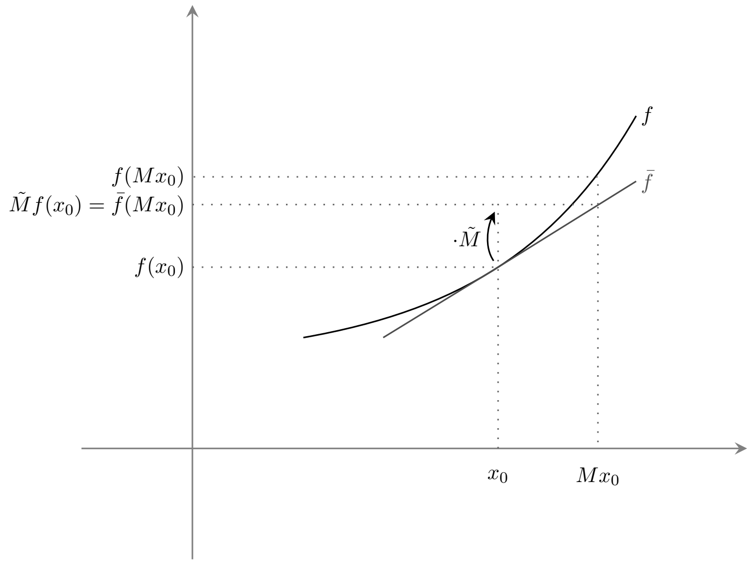
Weiterhin benötigen wir, dass konstante Faktoren „in“ f mehr Auswirkung haben als „außerhalb“.

Lemma 2

Sei f wie in Lemma Auspacken. Dann gilt für alle $\tilde{M} \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$, dass

$$\exists M \ \forall x \geq \varepsilon \ : f(Mx) \geq \tilde{M} f(x) \ .$$

Beweis Sei $\tilde{M}$ gegeben. An jeder Stelle x_0 können wir „ein“ M über die Tangente (lineare Approximation) $\bar{f}_{x_0}$ an f in x_0 bestimmen:



So ergibt sich mit $\bar{f}_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ die gesuchte Konstante als Lösung der Gleichung

$$\tilde{M} f(x_0) = \bar{f}_{x_0}(M_{x_0} \cdot x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(M_{x_0} - 1)x_0$$

zu

$$M_{x_0} = 1 + \frac{(\tilde{M} - 1) f(x_0)}{x_0 f'(x_0)} \ .$$

Nun liefert natürlich jedes x_0 eine andere solche Konstante, allerdings haben wir mit Fakt Konvexität und Lemma 1, dass $\frac{f(n)}{nf'(n)} \in \mathcal{O}(1)$ und damit die Menge der M_{x_0} auf $[n_0, \infty)$ mit dem n_0 aus der Definition von $\mathcal{O}(1)$ beschränkt ist. Weiterhin ist die Funktion $x \mapsto M_x$ auf $\mathbb{R}^+$ stetig und damit auf dem kompakten Intervall $[\varepsilon, n_0]$ beschränkt. Somit existiert

$$M := 1 + \sup_{x \in \mathbb{R}_{\geq \varepsilon}} \frac{(\tilde{M} - 1) f(x)}{x f'(x)} \ , \tag{1}$$

von dem wir zeigen, dass es die Behauptung erfüllt. Mit Fakt Konvexität gilt dann für $x \geq \varepsilon$

$$\begin{aligned} f(Mx) &= f\big(x + (M-1)x\big) \\ &\geq \bar{f}_x\big(x + (M-1)x\big) \\ &= f(x) + f'(x)(M-1)x \\ &\overset{(1)}{\geq} f(x) + f'(x) \left(\frac{(\tilde{M} - 1) f(x)}{x f'(x)} \right) x \\ &= \tilde{M} f(x) \ , \end{aligned}$$

was zu zeigen war. □

Nun können wir zum Beweis des eigentlichen Lemmas schreiten, das wir noch einmal wiederholen:

Lemma Auspacken

Sei f eine konvexe, stetig differenzierbare und streng monoton wachsende Funktion. Seien ferner g und h Funktionen mit $h \in \Omega(1)$ und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{h(n)} = \infty \; . \tag{2}$$

Dann ist auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(g(n))}{f(h(n))} = \infty \; . \tag{3}$$

Beweis Nach Definition von (2) gilt

$$\forall M \; \exists n_0 \; \forall n \geq n_0 : \frac{g(n)}{h(n)} > M \; .$$

Für hinreichend große n ist für jedes M also $g(n) > Mh(n)$, was zusammen mit Monotonie von f

$$\forall n \geq n_0 : f(g(n)) \; > \; f\big(M(h(n)\big) \; . \tag{4}$$

impliziert.

Wir haben zu zeigen, dass

$$\forall \tilde{M} \; \exists \tilde{n}_0 \; \forall n \geq \tilde{n}_0 : \frac{f(g(n))}{f(h(n))} > \tilde{M} \; .$$

Sei also $\tilde{M}$ gegeben. Aus $h \in \Omega(1)$ erhalten wir Konstanten n_0' und c, sodass

$$\forall n \geq n_0' : h(n) \geq c \; . \tag{5}$$

Dann finden wir nach Lemma 2 ein M, sodass

$$\forall x \geq c : f(Mx) \geq \tilde{M} f(x) \; . \tag{6}$$

Damit gilt für $n \geq \tilde{n}_0 := \max(n_0, n_0')$:

$$\begin{aligned} \frac{f(g(n))}{f(h(n))} &\overset{(4)}{>} \frac{f\big(Mh(n)\big)}{f(h(n))} \\ &\overset{(5),(6)}{\geq} \frac{\tilde{M} f(h(n))}{f(h(n))} \\ &= \tilde{M} \; , \end{aligned}$$

also ist die Aussage mit $\tilde{n}_0$ gezeigt. □