Ausgabedatum: 31.10.2013
Version: 2013-11-05 19:17

3. Übungsblatt für Track ε zur Vorlesung Entwurf und Analyse von Algorithmen, WS 13/14

Abgabe: *Bis* ***Freitag****, 08.11.2013, 12:00 Uhr, Kasten im Treppenhaus 48-6.*

Der Fehler der Woche[1]

$2 \cdot \binom{n}{2} = o(n^2)$, weil

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot \binom{n}{2}}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n!}{(n-2)!}}{n^2} = \frac{1}{\infty} = 0 \, .$$

Was ist falsch?

Basisaufgaben

B1: Asymptotiken

2 Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) $\sqrt[n]{n} = \mathcal{O}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$

b) $\sqrt[n]{n} = o(1)$

c) $\sqrt[n]{n} = \mathcal{O}(1)$

d) $3^n = \mathcal{O}(2^n)$

e) $2^n = \mathcal{O}(3^n)$

f) $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \Omega\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)$

[1] In dieser Kategorie stellen wir jede Woche einen Fehler vor, den wir in einer EAA-Klausur gefunden haben. Wir laden Sie ein, aus den Fehlern Anderer zu lernen!

B2: Rekursionsgleichungen 3 Punkte

Lösen Sie folgende Rekursionsgleichungen mittels Iteration und Korrektheitsbeweis; bringen Sie Ihre Ergebnisse außerdem in möglichst geschlossene Form.

a) $A(0) = 1,$
$A(1) = 1,$
$A(n) = 3 \cdot A(n-2) + 5, \quad n \geq 2 \ .$

b) $C(0) = 2,$
$C(n) = n \cdot C(n-1) + n, \quad n \geq 1 \ .$

B3: Funktionen Sortieren 3 Punkte

Betrachten Sie alle möglichen Paare (g_i, g_j) mit $0 \leq i, j \leq 9$ aus den untenstehenden Funktionen und geben Sie die jeweils stärkste gültige Beziehung aus $\mathcal{O}$, Ω, Θ, o, ω und $\sim$ an.

$$\begin{array}{llll} g_0(n) = \ln(\ln(n)) & g_1(n) = \ln^2(n) & g_2(n) = \frac{n}{\ln(n)} & g_3(n) = \frac{\ln(n)}{n} \\ g_4(n) = \sqrt{n}\ln^2(n) & g_5(n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n & g_6(n) = \left(\frac{3}{2}\right)^n & g_7(n) = n \\ g_8(n) = \sqrt{n} & g_9(n) = \ln(n) & & \end{array}$$

Zeigen Sie exemplarisch (pro Beziehungstyp einmal), wie die Beziehungen bewiesen werden können.

Hinweis: Können Sie sich Schreib- und Beweisarbeit sparen?

B4: Amortisierte Analyse 4 Punkte

Berechnen Sie mit Hilfe von amortisierten Kosten eine möglichst scharfe obere Schranke für die Gesamtkosten (gemessen in der Anzahl der modifizierten Ziffern) des Zählens von 0 nach n bei einer Zahlendarstellung zur Basis b.

Aufbauaufgaben

6. Aufgabe

3 + 2 Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) $\sqrt[n]{n} = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln^2(n)}{n^2}\right)$

Hinweis: $\ln^2(n)$ ist kurz für $(\ln(n))^2$ und nicht etwa $\ln(\ln(n))$.

b) $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$

7. Aufgabe

3 + 1 + 1 Punkte

Beweisen Sie die folgenden nützlichen Lemmata:

a) Sei $P(n) = a_0 + a_1 n + \cdots + a_k n^k$ ein beliebiges Polynom mit $a_k > 0$. Dann gilt

$$|P(n)| \sim a_k n^k \ . \qquad \text{(Lemma A: Polynome)}$$

b) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $c \in (1, \infty)$ gilt

$$n^\alpha \in o\left(c^n\right) \ . \qquad \text{(Lemma A: Poly vs. Exp)}$$

c) Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$(\log n)^\alpha \in o(n^\beta) \ . \qquad \text{(Lemma A: Polylog vs. Poly)}$$

8. Aufgabe

3 + 7 Punkte

a) Beweisen Sie Teil e) von Lemma 1.4 im Buch (Seite 15), natürlich ohne die anderen Teile zu verwenden.

b) Teile a) – c) von Lemma 1.4 gelten in beide Richtungen – dort könnte also „genau dann, wenn“ stehen – da sie genau zu Punkten 4. – 6. in Definition 1.8 passen.

Wie kann man Lemma 1.4 modifizieren, damit auch d) – f) zu Definition 1.8 äquivalent werden? Skizzieren Sie einen Beweis für die behauptete Äquivalenz.

Hinweis: Die Existenz von $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ ist nicht vorauszusetzen.

Tipp: Finden Sie zwei Funktionen f, g mit $f \in \mathcal{O}(g)$, sodass $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ nicht existiert?

Sie können ab sofort das folgende Lemma verwenden:

Lemma Auspacken

Sei f eine konvexe, stetig differenzierbare und streng monoton wachsende Funktion. Seien ferner g und h Funktionen mit $h \in \Omega(1)$ und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{h(n)} = \infty \; .$$

Dann ist auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(g(n))}{f(h(n))} = \infty \; .$$

Es sei bemerkt, dass man Quotienten mit Grenzwerte 0 auch untersuchen kann, indem man den Kehrwert betrachtet.

Einen Beweis des Lemmas finden Sie auf der Vorlesungswebsite[2].

[2] `http://wwwagak.cs.uni-kl.de/Vorlesung/eaa1314-uebungen.html#addon`