Ausgabedatum: 31.10.2013
Version: 2013-11-05 19:25

3. Übungsblatt für Track AI zur Vorlesung Entwurf und Analyse von Algorithmen, WS 13/14

Abgabe: *Bis* ***Freitag****, 08.11.2013, 12:00 Uhr, Kasten im Treppenhaus 48-6.*

Der Fehler der Woche[1]

$2 \cdot \binom{n}{2} = o(n^2)$, weil

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2 \cdot \binom{n}{2}}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n!}{(n-2)!}}{n^2} = \frac{1}{\infty} = 0\ .$$

Was ist falsch?

Basisaufgaben

B1: Asymptotiken

2 Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) $\sqrt[n]{n} = \mathcal{O}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$

b) $\sqrt[n]{n} = o(1)$

c) $\sqrt[n]{n} = \mathcal{O}(1)$

d) $3^n = \mathcal{O}(2^n)$

e) $2^n = \mathcal{O}(3^n)$

f) $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \Omega\left(\frac{1}{2\sqrt{n}}\right)$

[1] In dieser Kategorie stellen wir jede Woche einen Fehler vor, den wir in einer EAA-Klausur gefunden haben. Wir laden Sie ein, aus den Fehlern Anderer zu lernen!

B2: Rekursionsgleichungen

3 Punkte

Lösen Sie folgende Rekursionsgleichungen mittels Iteration und Korrektheitsbeweis; bringen Sie Ihre Ergebnisse außerdem in möglichst geschlossene Form.

a) $A(0) = 1,$
$A(1) = 1,$
$A(n) = 3 \cdot A(n-2) + 5, \quad n \geq 2 \; .$

b) $C(0) = 2,$
$C(n) = n \cdot C(n-1) + n, \quad n \geq 1 \; .$

B3: Funktionen Sortieren

3 Punkte

Betrachten Sie alle möglichen Paare (g_i, g_j) mit $0 \leq i, j \leq 9$ aus den untenstehenden Funktionen und geben Sie die jeweils stärkste gültige Beziehung aus $\mathcal{O}$, Ω, Θ, o, ω und $\sim$ an.

$$
\begin{array}{llll}
g_0(n) = \ln(\ln(n)) & g_1(n) = \ln^2(n) & g_2(n) = \frac{n}{\ln(n)} & g_3(n) = \frac{\ln(n)}{n} \\
g_4(n) = \sqrt{n}\ln^2(n) & g_5(n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n & g_6(n) = \left(\frac{3}{2}\right)^n & g_7(n) = n \\
g_8(n) = \sqrt{n} & g_9(n) = \ln(n) & &
\end{array}
$$

Zeigen Sie exemplarisch (pro Beziehungstyp einmal), wie die Beziehungen bewiesen werden können.

Hinweis: Können Sie sich Schreib- und Beweisarbeit sparen?

B4: Amortisierte Analyse

4 Punkte

Berechnen Sie mit Hilfe von amortisierten Kosten eine möglichst scharfe obere Schranke für die Gesamtkosten (gemessen in der Anzahl der modifizierten Ziffern) des Zählens von 0 nach n bei einer Zahlendarstellung zur Basis b.

Aufbauaufgaben

6. Aufgabe

3 + 2 Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) $\sqrt[n]{n} = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{\ln^2(n)}{n^2}\right)$

Hinweis: $\ln^2(n)$ ist kurz für $(\ln(n))^2$ und nicht etwa $\ln(\ln(n))$.

b) $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$

7. Aufgabe

3 + 1 + 1 Punkte

Beweisen Sie die folgenden nützlichen Lemmata:

a) Sei $P(n) = a_0 + a_1 n + \cdots + a_k n^k$ ein beliebiges Polynom mit $a_k > 0$. Dann gilt

$$|P(n)| \sim a_k n^k \ . \qquad \text{(Lemma A: Polynome)}$$

b) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $c \in (1, \infty)$ gilt

$$n^\alpha \in o\left(c^n\right) \ . \qquad \text{(Lemma A: Poly vs. Exp)}$$

c) Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$(\log n)^\alpha \in o(n^\beta) \ . \qquad \text{(Lemma A: Polylog vs. Poly)}$$

8. Aufgabe

4 + 3 + 3 Punkte

Wir definieren den *Monoidhomomorphismus* $\varphi : \{0,1\} \to \{\mathsf{Q}, \mathsf{M}\}^\star$ über

$$\varphi(b) = \begin{cases} \mathsf{Q}, & b = 0 \\ \mathsf{QM}, & b = 1 \end{cases} \ .$$

Gegeben seien $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathsf{bin}(n) = n_1 \dots n_k \in \{0,1\}^\star$ der Binärdarstellung von n ohne führende Nullen (also $n_1 = 1$). Die *binäre Methode* ist dann die folgende Berechnung:

```
y = x;
foreach ( s in φ(n_2 ... n_k) ) // von links nach rechts
  if s == Q then
    y = y*y;
  else // s == M
    y = y*x;
  end
end
```

Das Ergebnis y dieser Rechnung bezeichnen wir mit $\mathrm{BM}(x, n)$.

Hinweis: Ein „Monoidhomomorphismus“, der wie hier auf dem Alphabet einer formalen Sprache definiert ist, kann auf Wörtern über diesem Alphabet – die ein Monoid bilden – *fortgesetzt*, das heißt zeichenweise angewendet werden. Es gilt also zum Beispiel $\varphi(0010) = \mathsf{QQQMQ}$, $\varphi(11) = \mathsf{QMQM}$ und $\varphi(\varepsilon) = \varepsilon$. Hierbei bezeichnet ε das leere Wort (mit Länge 0).

a) Zeigen Sie: $\mathrm{BM}(x, n) = x^n$.

   Hinweis: Wie hängt x^n von $x^{n'}$ ab, wenn n' durch Weglassen der letzten Stelle von n definiert ist, wenn also $\mathrm{bin}(n') = n_1 \dots n_{k-1}$?

b) Beweisen oder widerlegen Sie: Die binäre Methode ist optimal, das heißt sie liefert für jedes n eine Berechnungsvorschrift mit einer minimalen Anzahl von Multiplikationen.

c) Berechnen Sie die Anzahl der Multiplikationen zur Berechnung von x^n nach der binären Methode in Abhängigkeit von n. Charakterisieren Sie den Worst-Case.

Sie können ab sofort das folgende Lemma verwenden:

Lemma Auspacken

Sei f eine konvexe, stetig differenzierbare und streng monoton wachsende Funktion. Seien ferner g und h Funktionen mit $h \in \Omega(1)$ und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{h(n)} = \infty\ .$$

Dann ist auch

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(g(n))}{f(h(n))} = \infty\ .$$

Es sei bemerkt, dass man Quotienten mit Grenzwerte 0 auch untersuchen kann, indem man den Kehrwert betrachtet.

Einen Beweis des Lemmas finden Sie auf der Vorlesungswebsite[2].

[2] http://wwwagak.cs.uni-kl.de/Vorlesung/eaa1314-uebungen.html#addon