

2. Übungsblatt zur Vorlesung Beweistechniken, WS 12/13

Abgabe: Bis Dienstag, 05.11.2013, 12:00 Uhr, Abgabekasten im Treppenhaus 48-6.

Hinweis: Machen Sie bei ihren Beweisen jeweils kenntlich, was zu welchem Bestandteil – Anfang, Mitte und Ende – gehört.

4. Aufgabe

3 + 2 + 3 Punkte

- a) Beweisen Sie folgende Aussage durch vollständige Fallunterscheidung:

Eine Marktfrau hat eine Balkenwaage und (beliebig viele) Gewichte zu 3 g und 5 g, die nur in die linke Waagschale gelegt werden dürfen (Gesundheitsamt...).
Behauptung: Die Marktfrau kann jedes ganzzahlige Gewicht $G \geq 8$ g abwiegen.

Hinweis: Betrachten Sie das abzuwiegende Gewicht modulo einer geeignet gewählten Zahl und unterscheiden Sie Fälle, je nachdem welcher Rest bleibt.

- b) Wie ändert sich der Beweis für Teil a), wenn das Gewicht zu 5 g durch ein Gewicht zu 4 g ersetzt wird?
c) Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $5 \mid (n^5 - n)$.

Tip: Machen Sie eine Fallunterscheidung nach $r := n \bmod 5$.

5. Aufgabe

2 Punkte

Zeigen Sie folgende Äquivalenz:

$$f = \mathcal{O}(g) \Leftrightarrow g = \Omega(f)$$

Verwenden Sie hierfür **nicht** Lemma 1.4 aus dem EAA-Buch, sondern direkt die Definitionen der Landau-Symbole.

Bitte wenden!

6. Aufgabe

2 + 2 + 2 + [2] Punkte

Beweisen Sie folgende Aussagen durch Induktion.

a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$.

c) Für alle $x \in \mathbb{R}_{\geq -1}$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $(1+x)^n \geq 1+n \cdot x$.

d) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ können die *Türme von Hanoi* mit n Scheiben in $2^n - 1$ Schritten gelöst werden.

Eine anschauliche Beschreibung der Türme von Hanoi ist auf Wikipedia zu finden:
http://de.wikipedia.org/wiki/T%C3%BCrme_von_Hanoi

7. Aufgabe

2 Punkte

Die Menge \mathcal{T} der *erweiterten Binärbäume* sei (induktiv) definiert als die kleinste Menge mit folgenden Eigenschaften:

- Ein einzelnes Blatt „ \square “ ist ein erw. Binärbaum:

$$\square \in \mathcal{T}$$

- Für zwei Bäume $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ ist auch der Baum bestehend aus einem inneren Knoten „ \circ “ und T_1 und T_2 als linkem bzw. rechten Teilbaum ein erw. Binärbaum:

$$\begin{array}{c} \circ \\ / \quad \backslash \\ T_1 \quad T_2 \end{array} \in \mathcal{T}$$

Sei $T \in \mathcal{T}$ ein solcher erw. Binärbaum. Definiere $b(T)$ als die Anzahl Blätter „ \square “ in T und analog $k(T)$ die Anzahl innerer Knoten.

Zeigen Sie mit (*struktureller*) *Induktion*, dass für jeden erweiterten Binärbaum $T \in \mathcal{T}$ gilt: $b(T) = k(T) + 1$.