Ausgabedatum: 22.10.2013
Version: 2013-10-21 10:42

1. Übungsblatt zur Vorlesung Beweistechniken, WS 13/14

Abgabe: *Bis Dienstag, 29.10.2013, 12:00 Uhr, Abgabenkasten im Treppenhaus 48-6.*

Übungskonzept

Die Bearbeitung der Übungen *Beweistechniken* ist Zulassungsvoraussetzung zur Abschlussklausur des Moduls *Entwurf und Analyse von Algorithmen für Angewandte Informatiker*.
Es gelten folgende Regeln:

- Es müssen auf **jedem einzelnen Blatt** 50 % der Punkte erreicht werden, die es auf Pflichtaufgaben gibt.
- Punkte gibt es für sinnvoll bearbeitete Aufgaben. Insbesondere müssen *nicht* zwingend 50 % der Aufgaben korrekt gelöst werden, um die Zulassung zu erreichen.

  Die Pflichtpunkte sind bei jeder Aufgabe angegeben – evtl. separat für die jeweiligen Teilaufgaben.
- Über freiwillige Aufgaben können Zusatzpunkte gesammelt werden.
  Freiwillige (Teil-) Aufgaben sind daran zu erkennen, dass ihre Punktzahl [eingeklammert] ist.

Hinweis: Machen Sie bei ihren Beweisen jeweils kenntlich, was zu welchem Bestandteil gehört. Gemeint sind die drei Bestandteile, die in der Vorlesung eingeführt wurden:

- *Anfang:* Hier sollen Sie bekannte Voraussetzungen, benutzte Definitionen und Resultate sammeln.
- *Mitte:* Dieser Bestandteil enthält die eigentliche Argumentationskette, aus der die Behauptung folgt. Dazu gehört auch die explizite Angabe des Beweis-Schemas, z. B. „direkter Beweis“ oder „Beweis durch Widerspruch“.
- *Ende:* Hier machen Sie nochmals explizit, was soeben gezeigt wurde und beenden den Beweis mit „□“.

1. Aufgabe

$1 + 2 + 1 + [2]$ Punkte

Zeigen Sie **direkt**:

a) Die Summe von 3 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist durch 3 teilbar.

Tipp: Verwenden Sie, dass jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ sich als $n = 3k + r$ für gewisse Zahlen $k \in \mathbb{N}_0$ und $r \in \{0, 1, 2\}$ darstellen lässt.

b) Für ungerade k ist die Summe von k aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen durch k teilbar.

c) Es gibt unlösbare Übungsaufgaben.[1]

d) *[Notwendige Bedingung 1. Ordung für lokale Extrema]*

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Es gilt:
Wenn $x_0 \in \mathbb{R}$ eine lokales Maximum von f ist, dann ist $f'(x_0) = 0$.

2. Aufgabe

$1 + 1 + 1 + [2]$ Punkte

Zeigen Sie durch **Kontraposition**:

a) Sei $x \in \mathbb{R}$. Aus $\frac{x}{x^2+1} > 2$ folgt $x > 0$.

b) Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i| < \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{i\to\infty} a_i = 0 \ .$$

c) *[Lineare Unabhängigkeit ist stabil bzgl. $\subseteq$]*

Wenn die Vektoren $\{v_1, \ldots, v_n\}$ linear unabhängig sind, dann sind auch die Vektoren $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ linear unabhängig.

d) *[Reduktion]*

Sei $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine `While`-berechenbare Funktion. Dann gilt:
Wenn $f \circ g$ *nicht* `While`-berechenbar ist, dann ist auch f selbst *nicht* `While`-berechenbar.

Bitte wenden!

[1] Wir werden uns bemühen, in dieser Vorlesung keine solchen zu stellen …

3. Aufgabe

1 + 1 + 2 + [3] Punkte

Zeigen Sie jeweils mit einem **Widerspruchsbeweis**:

a) Sei U eine *unendliche* Menge, $E \subset U$ eine *endliche* Teilmenge von U.

Das Komplement $\overline{E} := U \setminus E$ von E bezüglich U ist unendlich.

b) Es gibt unlösbare Übungsaufgaben.[2]

c) *[Induktion ab k]*

Sei A_n eine beliebige Aussage, die von $n \in \mathbb{N}_0$ abhängt und $k \in \mathbb{N}_0$ eine Konstante.

Zeigen Sie: Wenn A_k gilt und $\forall n \geq k : A_n \Rightarrow A_{n+1}$, dann gilt $\forall n \geq k : A_n$.

Tipp: Orientieren Sie sich an der Argumentation aus dem Beweistechniken-Skript.

d) *[Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$]*

Sei $\mathbb{B}^\omega := \{b_1 b_2 b_3 \cdots \mid \forall i \in \mathbb{N} : b_i \in \{0,1\}\}$ die Menge aller *unendlichen* Binärstrings.

Zeigen Sie, dass $\mathbb{B}^\omega$ nicht *abzählbar* ist.

Dabei ist eine Menge M genau dann abzählbar, wenn es eine *injektive* Funktion $f : M \to \mathbb{N}$ gibt.

Tipp: Anschaulich ist eine Menge M abzählbar, wenn man alle ihre Elemente in einer Liste untereinander schreiben kann. Denn dann können wir f wählen, indem wir für jedes Element $m \in M$ einfach $f(m)$ auf die Zeilennummer in der Liste setzen.
Zeigen Sie, dass eine solche Liste der Elemente von $\mathbb{B}^\omega$ unvollständig ist, indem Sie ein Element konstruieren, das in der Liste fehlt.

[2] Ja, das ist die gleiche Behauptung wie 1. Aufgabe c).
Nein, es ist trotzdem nicht die selbe Aufgabe, denn hier ist ein Widerspruchsbeweis, dort ein direkter gefordert.