

3. Übungsblatt zur Vorlesung Kombinatorische Algorithmen, SS 13

Abgabe: Bis Montag, 13.05.2013, 12:00 Uhr,
in den Abgabekasten vor dem AG-Flur oder per Email an `wild@cs.uni...`

3. Aufgabe

2 + 2 Punkte

Zeigen Sie die beiden folgenden “No-Free-Lunch”-Theoreme für die verlustfreie Komprimierung.

Die Allquantifizierung über alle Komprimierungsalgorithmen A verstehen wir dabei über die Menge aller injektiven Funktionen $A : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$. Die Theoreme gelten für jedes nicht-unäre Alphabet Σ , aber Sie dürfen sich auf den binären Fall $\Sigma = \{0, 1\}$ beschränken.

- a) Für jeden beliebigen Komprimierungsalgorithmus A existiert eine Eingabe w , so dass $A(w)$ mindestens genauso groß ist wie w selbst.
- b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jeden Komprimierungsalgorithmus A gilt: Unter allen Eingaben w der Länge $\leq n$ kann A weniger als die Hälfte aller Eingaben kürzer kodieren als die Eingabe selbst.

Auf der Rückseite geht's weiter!

4. Aufgabe

4 + 1 + 2 Punkte

Wir betrachten den Begriff der *exhaustive History* wie er von Lempel und Ziv in [LZ76, page 76] eingeführt wird und bezeichnen die zugehörige Aufteilung des Eingabewortes als **LZ77-Zerlegung**.

Weiterhin ist im Beweis zu Theorem 2 von [ZL78] auf Seite 533 eine eingeschränkte Variante dieser Zerlegung definiert. Wir betrachten dabei den Grenzfall für $n \rightarrow \infty$ und nennen die resultierende Aufteilung der Eingabe **LZ78-Zerlegung**.

- a) Definieren Sie die LZ77- und LZ78-Zerlegung formal in unserer Notation für beliebiges $w \in \Sigma^*$. Was sind Gemeinsamkeiten und Unterschiede der beiden Zerlegungen?
- b) Geben Sie für das Wort $w = aaaaabbababaaabb$
 - (i) die LZ77-Zerlegung,
 - (ii) die LZ78-Zerlegung
 - (iii) und eine beliebige weitere History an, die nicht *exhaustive* ist.
- c) Beweisen Sie:
 - (i) Für jedes Wort $w \in \Sigma^*$ gibt es genau eine LZ77-Zerlegung.
 - (ii) Für jedes Wort $w \in \Sigma^*$ gibt es genau eine LZ78-Zerlegung.

Literatur

- [LZ76] Abraham Lempel and Jacob Ziv. On the Complexity of Finite Sequences. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 22(1):75–81, 1976. doi:10.1109/TIT.1976.1055501.
- [ZL78] Jacob Ziv and Abraham Lempel. Compression of individual sequences via variable-rate coding. *Information Theory, IEEE Transactions on*, 24(5):530–536, 1978. doi:10.1109/TIT.1978.1055934.